ZUR VARIATION VON LUMINESZENZ-LEBENSDAUERN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Physik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Karl-Heinz Tews
aus Köslin

1972

Marburg/Lahn 1973

ZUR VARIATION VON LUMINESZENZ-LEBENSDAUERN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Physik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Karl-Heinz Tews
aus Köslin

Marburg/Lahn 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vom Fachbereich Physik der Philipps-Universität
Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 28.4.1972

Tag der mündlichen Prüfung am 1.6.1972

Berichterstatter: Prof. Dr. K. Suchy

Mitberichterstatter: Prof. Dr. H. Kuhn

INHALT

I. EINLEITUNG UND EXPERIMENTE

1. Einleitung 4

2. Experimente 7
2.1. Schichtsysteme 7
2.2. Meßapparatur 10
2.3. Auswertung 12
2.4. Bemerkungen zu den Experimenten 14

II. THEORIE

3. Allgemeines zu den theoretischen Methoden 17
3.1. Überblick und Modell 17
3.2. Felder und Potentiale des elektrischen Dipols 19
3.3. Zum Energiestrom 21
3.4. Der gedämpfte Oszillator 22
3.5. Lebensdauer, Abklingkonstante, Quantenausbeute und Energiestrom 24
3.6. Der gedämpfte Oszillator im reflektierten Eigenfeld 30
3.7. Der ideale Spiegel 33
3.8. Allgemeines zu den Vergleichen von Theorie und Experiment 39

4. Die Reflexions-Methode 41
4.1. Einleitung 41
4.2. Der Reflexions-Ansatz 42
4.3. Analogie zum idealen Spiegel 44
4.4. Kurze Diskussion 46
4.5. Vergleich mit dem Experiment 47

5. Die Interferenz-Methode 52
5.1. Einleitung 52
5.2. Das reflektierte Feld 53
5.3. Zum Energiestrom 58
5.4. Der Interferenzterm des Energiestroms 61
5.5. Kurze Diskussion 65
5.6. Vergleich mit dem Experiment 67

6. Die Polarisations-Methode 72
6.1. Einleitung und Überblick 72
6.2. Die allgemeine Lösung 74
6.3. Analytische Integration 76
6.4. Zur Polarisierbarkeit 80
6.5. Kurze Diskussion 82
6.6. Vergleich mit dem Experiment 82
6.7. Integrale zur Polarisations-Methode 88

7. Die Telegraphie-Methode 90
7.1. Einleitung und Überblick 90
7.2. Zum Hertzschen Vektor 91
7.3. Entwicklung nach ebenen Wellen 94
7.3.1. Die Entwicklung 94
7.3.2. Der erste Beweis 96
7.3.3. Der zweite Beweis 97
7.3.4. Zur Interpretation der Entwicklung 98
7.3.5. Eine einfache Erweiterung 100
7.4. Der senkrechte Dipol 101
7.5. Der parallele Dipol 105
7.6. Zwischenbemerkungen 107
7.6.1. Erster Grenzfall: fehlender Spiegel 107
7.6.2. Zweiter Grenzfall: idealer Spiegel 108
7.6.3. Vergleich mit Sommerfeld 109
7.6.4. Die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten 110
7.7. Reflektierte Felder am Dipolort 111
7.7.1. Hilfsmittel 111
7.7.2. Der senkrechte Dipol 112
7.7.3. Der parallele Dipol 113
7.7.4. Beliebige Dipolstellung 115
7.8. Zur numerischen Integration 116
7.9. Singularitäten 117
7.10. Kurze Diskussion 122
7.11. Vergleich mit dem Experiment 124

8. Die Näherungen der Näherungs-Methoden 129
8.1. Die Näherung der Reflexions-Methode 129
8.2. Die Näherung der Interferenz-Methode 132
8.3. Die Näherung der Polarisations-Methode ... 135
8.4. Vergleich der drei Näherungen 137

9. Noch einmal: Der ideale Spiegel 138

III. SCHLUSS

10. Diskussion des theoretischen Modells 140
10.1. Zum Vorzug der exakten Methode 140
10.2. Zur zweiten Grenzfläche 142
10.3. Zur Anisotropie von H1 143
10.4. Zu den Nachbar-Dipolen 143
10.5. Zu den Brechungsindizes 144
10.6. Zur Interpretation der Vergleiche von Theorie und Experiment 144
10.7. Zur Verbesserung der Übereinstimmung von Theorie und Experiment 147

11. Zusammenfassung und Schluß 148

IV. ANHANG

A1. Zu den elektrodynamischen Potentialen 150
A2. Zu den retardierten Potentialen 153
A3. Zur Wellen- bzw. Telegraphen-Gleichung 157
A4. Zum Hertzschen Vektor 159
A5. Die elektrodynamischen Potentiale des Dipols 160
A6. Zu den Stetigkeitsbedingungen 162
A7. Zur isotropen Verteilung 168
A8. Einige Zahlenwerte für den Europium-Oszillator 175

I. EINLEITUNG UND EXPERIMENTE

1. Einleitung

Mit der Technik des monomolekularen Systemaufbaus (vgl.z.B./15/,/4/; s.auch 2.1.) kann man in definierten Abstand von einer monomolekularen Schicht der zu untersuchenden Moleküle Flächen bringen, etwa Schichten eines anderen absorbierenden Systems oder Grenzflächen zu Medien mit einem anderen Brechungsindex (Spiegel). Dadurch ist es experimentell sehr sauber möglich, abstandsabhängige Phänomene zu messen: Energieübergang, Weitwinkelinterferenz, Lebensdauern, usw. Zur theoretischen Untersuchung dieser Probleme muß nicht nur das elektrische Feld eines emittierenden Moleküls in seiner Umgebung (z.B.Dipolfeld, vgl.3.1.,3.2.) bekannt sein, sondern auch dessen Beeinflussung durch ebene Flächen.

Zur sauberen Auswertung von Intensitäts-Messungen sind im allgemeinen noch schwierige, mit Fehlern behaftete Korrekturen nötig; dagegen sind Lebensdauer-Messungen direkte Messungen, bei denen Korrekturen entfallen, außerdem sind sie weniger störanfällig als Intensitäts-Messungen. Lebensdauer-Messungen eignen sich somit im allgemeinen besser als Intensitäts-Messungen zum Test theoretischer Modelle sowie zur Prüfung von Parametern. Bzgl. früherer Experimente zur Variation der Lebensdauern vgl./14/.

In der vorliegenden Arbeit wird zum ersten Mal eine im Rahmen eines einfachen Modells exakte Methode zur Bestimmung der Lebensdauer eines angeregten Moleküls als Funktion des Abstands von einem Spiegel dargestellt und mit eigenen sowie fremden experimentellen Ergebnissen verglichen. Aus der guten Übereinstimmung von Experiment und Theorie kann die Brauchbarkeit des Modells gefolgert werden, die Abweichungen wecken den Wunsch nach einigen einfachen Verfeinerungen des Modells.

Kürzlich sind einige von demselben Modell ausgehende Näherungs-Methoden veröffentlicht worden: /7/, /16/, /24/. Wir betrachten es als besonders wertvoll, daß aus der exakten Methode erstmals Fehler und Grenzen der Näherungs-Methoden quantitativ angegeben werden können (zur Überraschung zeigte sich dabei, daß die eine Näherungs-Methode in gewissen Spezialfällen völlig exakt ist). Die Näherungs-Methoden sind also keineswegs überholt, sondern gewinnen sogar an Wert bei der vorläufigen, überschlagsmäßigen Untersuchung komplizierter Systeme, für die die exakte Methode aufwendiger und unübersichtlicher ist. Es erschien daher sinnvoll, die Näherungs-Methoden zusammen mit der exakten Methode in einheitlicher Nomenklatur darzustellen.

Der entscheidende Vorzug der im Rahmen eines Modells exakten Methode liegt in der Gewißheit, daß Abweichungen zwischen theoretischen und experimen-

tellen Ergebnissen durch das Modell bedingt sind: In den Näherungs-Methoden könnten die Abweichungen auch aus der eventuell schlechten Näherung resultieren.

Nach einer kurzen Beschreibung der Experimente im Rest des I.Teils und der Darstellung der drei Näherungs-Methoden sowie der exakten Methode im II.Teil stellen wir deshalb in 10. einige Vernachlässigungen des Modells zusammen und zeigen Möglichkeiten zur weiteren Verbesserung der Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

2. Experimente

2.1. Schichtsysteme

Die Proben wurden hergestellt mit der Technik des Aufbaus monomolekularer Vielfachschichten[1]: Tropft man etwa eine Fettsäure, die in einem leicht flüchtigen Lösungsmittel (z.B.Chloroform) gelöst ist, vorsichtig auf eine Wasseroberfläche, so erhält man nach dem Verdampfen des Lösungsmittels durch Zusammenschieben der auf der Oberfläche zurückgebliebenen Fettsäuremoleküle einen monomolekularen Film. Durch Ein- oder Austauchen eines Glasplättchens kann dieser Film auf einen festen Träger übertragen werden, durch wiederholtes Ein- und Austauchen erhält man monomolekulare Vielfachschichten.

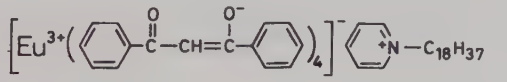
Nun brauchen nicht alle Schichten eines Schichtsystems aus derselben Substanz zu bestehen: Man kann z.B. eine Substanz A aufziehen, danach die Wasseroberfläche reinigen, eine Substanz B spreiten und aufziehen usf. So lassen sich -insbesondere bei Verwendung von Farbstoffen- Funktionseinheiten aus monomolekularen Schichten nach Plan herstellen [2].

---

[1] vgl. etwa Langmuir /19/, Blodgett /1/. Ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis mit etwa 500 Titeln bis Ende 1944 über frühe Arbeiten mit monomolekularen Schichten findet man in /25/.

[2] vgl. H.Kuhn und Mitarbeiter /14/,/4/,/15/,/29/.

Wir tropften Arachinsäure (10^{-3} m in Chloroform gelöst) auf Wasser (ph ≈5.8 mit $CdCl_2$ $5 \cdot 10^{-4}$ molar) und zogen bei Zimmertemperatur unter einem Schub von 30 dyn/cm auf ein gut gereinigtes (vgl./3/,S.44) Gläschen (Viertelobjektträger) drei monomolekulare Cadmium-Arachidat-Schichten (C_{20}). In einem zweiten Trog mit reinem Wasser (ph 7.8 ± 0.6) wurden danach bei der Temperatur (26±2)°C unter dem Schub 28 dyn/cm zuerst vier Schichten Tripalmitin [3] (TPT), dann eine Doppelschicht Eu eines Gemisches [3] aus dem Europium-Komplex I [4]



(2.1.-1)

mit Tripalmitin im Molverhältnis 1:1 und schließlich m_D Deckschichten aus TPT aufgezogen. Der Schichtaufbau ist also schematisch

$$3C_{20}/4TPT/2Eu/m_DTPT \qquad (2.1.-2)$$

m_D wird für die Messung der Lebensdauer τ des mit 612 nm fluoreszierenden Europium-Zustandes variiert.

---

[3] TPT (10^{-3} m) und die Eu-Mischung (Komplex I und TPT je $3 \cdot 10^{-4}$ m) waren in einem Gemisch aus Benzol und Aceton (Volumenverhältnis 4:1) gelöst.

[4] Der Europium-Komplex I wurde von W.Sperling und J.Sondermann hergestellt.

Die Präparierung der Träger mit C_{20} war erforderlich, weil TPT auf hydrophile Gläschen nur schlecht aufzog. Die vier TPT-Trennschichten waren nötig, weil der Komplex I durch C_{20} zerstört wird; aus demselben Grund wurde auch für die Deckschichten TPT gewählt.

Im allgemeinen wurden auf die eine Hälfte des Trägers mehr Deckschichten aufgezogen als auf die andere. Danach wurden die Lebensdauern auf beiden Systemen gemessen, dann über das ganze Gläschen neue Deckschichten gezogen und wieder die Lebensdauern gemessen. In günstigen Fällen konnten so an demselben Träger die Lebensdauern für etwa 10×2 verschiedene Anzahlen m_D von Deckschichten bestimmt werden.

Für die Messungen an den Metallspiegeln ist der Schichtaufbau nach /6/,S.105 schematisch

$$\text{Metall}/m_D C_{20}/2\text{Eu} \qquad (2.1.-3)$$

wobei die Eu-Schichten aus einer Mischung von Komplex I und Tripalmitin im Molverhältnis 1:3 bestehen.

2.2. Die Meßapparatur

Die für die Messung der Lebensdauern erforderliche Apparatur ist recht einfach und unkritisch. Wir beschränken uns daher auf eine kurze Beschreibung des Prinzips.

Das Leuchtfeld einer Quecksilberdampflampe HgL (HBO 100W/2 der Fa.Osram) wird über einen Hohlspiegel Sp auf den Eingangsspalt eines Beckmann-Monochromators M abgebildet. Über die Linsen L1 und L2 erhält man auf der Probe P ein etwa 8×2 mm² großes Bild des Austrittspalts von M. (Dieses Bild wurde zum Ausgleich kleinerer Unregelmäßigkeiten des Schichtaufbaus sowie zur Vermeidung der Photozerstörung von Komplex I so groß gewählt.) Im Meßstrahlengang senkrecht zum Plättchen P wird das die Linse L3 treffende Emissionslicht auf der Photokathode des Photomultipliers PM (EMI 9658 QB, S-20 Kathode) vereinigt, wobei das Interferenzfilter IF (PAL 701039, λ_{Max}=610 nm, $\Delta\lambda_{1/2}$=HW=19 nm; T_{Max}=60%) nur die starke Linie bei 612 nm durchläßt. Die Proben wurden bei 20°C thermostatisiert.

Das Anregungslicht (λ=350 nm) wird durch den Synchron-Chopper Ch in 10 ms Rechteckimpulse (Anstiegszeit < 50 µs) zerlegt. Die Ausgangsspannung des Photomultipliers klingt in den Dunkelzeiten der Anregung nach einer Exponentialfunktion $\exp(-t/\tau)$ mit τ=0.7 ms ab. Im CAT[1)] (C1024 Time averaging Computer der Fa. Varian) wurden für jede Messung etwa 4000 dieser Abklingfunktionen addiert.

---

1) Dieses Gerät ist eine Leihgabe der Deutschen Forschungsgemeinschaft und wurde uns freundlicherweise von Dr. Bär für die Messungen zur Verfügung gestellt.

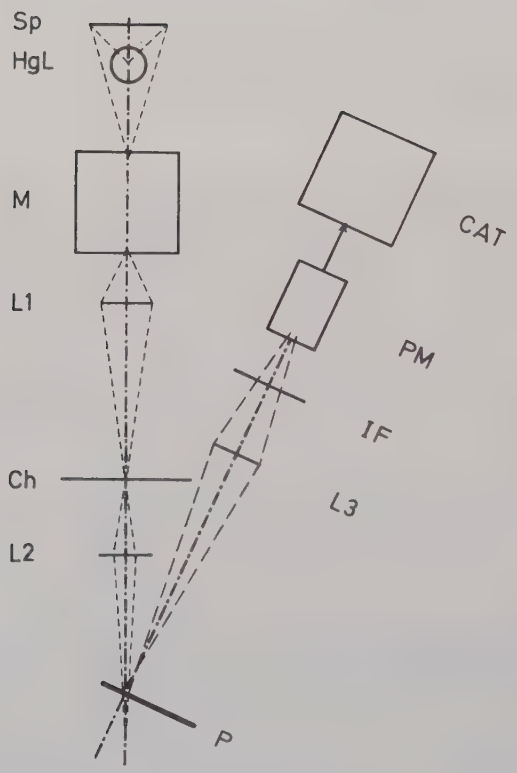


Fig.(2.2.-F): Prinzipieller Aufbau der Meßapparatur.
(Beschreibung im Text).

2.3. Zur Auswertung

Die im CAT (vgl.2.2.) gesammelten Abklingfunktionen wurden von einem xt-Schreiber (Rohde und Schwarz Enograph-G, Type ZSG, BN 18532) über 2 Dekaden logarithmiert und gezeichnet.

Durch die so erhaltenen verrauschten Kurven kann über die zwei gezeichneten Dekaden gut "nach Augenmaß" eine Gerade gelegt werden. Die Steigung der Geraden ist umgekehrt proportional zu τ.

Die so erhaltenen Lebensdauern $\tau=\tau(m_D)$ als Funktion der Anzahl m_D der Deckschichten (vgl.2.1.) zeigten eine geringe systematische Abhängigkeit von der Probe, die in der weiteren Auswertung nicht berücksichtigt wurde. Die effektive Zahl der Deckschichten ist $m:=m_D+1$, da die Europium-Atome noch durch eine hydrophobe Kette von der Schichtoberfläche getrennt sind.

In Fig.(2.3.-F) [1] sind Mittelwerte und mittlere quadratische Abweichung aus je bis zu 40 Einzelmessungen zusammengestellt.

---

[1] Fig.(2.3.-F) unterscheidet sich von den Meßergebnissen in /24/ durch Zusatzmessungen an einigen Punkten.

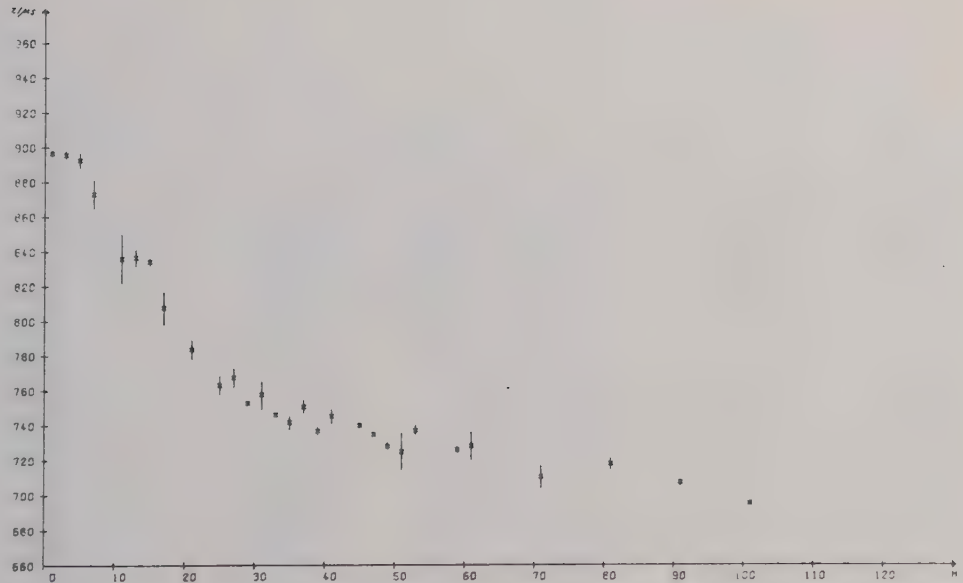


Fig.(2.3.-F): Mittelwerte und mittlere quadratische Abweichungen der Meßergebnisse.

Aufgetragen ist die Lebensdauer τ in Abhängigkeit von der effektiven Anzahl $m=m_D+1$ der Deckschichten.

2.4. Bemerkungen zu den Experimenten

2.4.1. Zum Aufziehen

Die Herstellung der Schichtsysteme war zeitweise sehr mühsam, insbesondere die Eu-Mischschichten zogen oft tage-, manchmal wochenlang fleckig und unregelmäßig auf. Variierung der Aufziehbedingungen -Schub, Temperatur, ph Wert, Geschwindigkeit- brachte keine Verbesserung. Für die Messungen wurden nur gleichmäßig fluoreszierende Systeme verwendet.

2.4.2. Zur Stabilität des Eu-Komplexes

Der Eu-Komplex I ist nicht sehr stabil und wird z.B. schon durch eine C_{20}-Umgebung im allgemeinen bald zerstört (vgl.2.1.); aber auch in einer TPT-Umgebung zerfiel der Komplex manchmal sehr schnell: deutliches Nachlassen der Fluoreszenz-Intensität, drastische Veränderung der Lebensdauer (dann verwarfen wir die Plättchen). Im allgemeinen wurde der Komplex durch Dunkelheit und/oder tiefere Temperatur stabilisiert. Systematische Versuche zeigten aber, daß m a n c h m a l von gleichzeitig (und damit anscheinend auch gleichartig) aufgezogenen Proben die im dunklen Kühlschrank aufbewahrten nach etwa einem Tag weitgehend zerfallen waren, während die bei Licht und Zimmertemperatur aufbewahrten Vergleichs-Plättchen keinen Zerfall zeigten. Der bei den Messungen verwendete Thermostat (vgl.2.2.) scheint allerdings die Stabilität vergrößert zu haben.

2.4.3. Zur Logarithmierung

Die Logarithmierung einer gemessenen Exponentialfunktion mit Analog-Technik hängt empfindlich von einem sauberen Nullabgleich ab: Falscher Abgleich führt bei der Logarithmierung (bei uns über 2 Dekaden, vgl.2.3.) zu falschen Steigungen oder gar zu deutlichen Abweichungen von der Linearität. Die mit dem vorhandenen Logarithmierer (vgl.2.3.) bei mehrmaligem sauberem Nullabgleich erhaltenen Ergebnisse lagen innerhalb der Fehlergrenzen von (2.3.-F).

2.4.4. Zur besten Geraden

Durch die nach der Logarithmierung (vgl.2.3.) erhaltenen Meßpunkte wurde "nach Augenmaß" "die beste Gerade" gelegt. Da nun im allgemeinen der Logarithmus des Mittelwerts einer Menge von Zahlen verschieden ist vom Mittelwert der Logarithmen, hat die "Regressionsgerade" im allgemeinen eine falsche Steigung. Außerdem sind bei kleinen Intensitäten - insbesondere beim "Untergrund-Rausch" - die Streuungen der Signale des Photomultipliers unsymmetrisch zum Mittelwert.

Eine Abschätzung der Einflüsse auf das Endergebnis (also hier die Lebensdauer τ) ist nicht einfach. Qualitativ ist klar, daß die Fehler umso größer werden, je kleiner das Verhältnis Mittelwert zu mittlerer Streuung wird.

2.4.5. Verbesserungen

Durch den in naher Zukunft geplanten Einsatz digitaler Meßtechnik erwarten wir eine beträchtliche Verkürzung der effektiven Meßzeit (vgl. dazu die Stabilität des Komplexes I, 2.4.2.) sowie vor allem eine erhebliche Verbesserung der Auswertung: vgl.2.4.3. und insbesondere 2.4.4.

Auf Änderungen des Schichtaufbaus zur weiteren Verbesserung der Übereinstimmung von experimentellen und theoretischen Ergebnissen gehen wir in 10. (vgl.besonders 10.6., 10.7.) ein.

II. THEORIE

3. Allgemeines zu den theoretischen Methoden

3.1. Überblick und Modell

Um die Abstandsabhängigkeit der Lebensdauer theoretisch zu untersuchen, machen wir uns ein einfaches Modell:

Zwei homogene, isotrope Halbräume seien durch eine Ebene getrennt, "über" der sich im Abstand d ein strahlungsgedämpfter, punktförmiger, klassischer elektrischer Dipol befindet, vgl.Fig.(3.1.-F). Durch Veränderung des Abstands d zum unteren, im allgemeinen leitend gedachten Halbraum kann die Lebensdauer τ des Dipols verändert werden. Gesucht ist $\tau=\tau(d)$.

Die Abweichungen unseres Modells von dem experimentellen Aufbau und ihre Einflüsse auf die theoretischen Ergebnisse werden in 10. diskutiert.

In den folgenden Abschnitten werden vier Methoden zur Berechnung von $\tau=\tau(d)$ dargestellt. Die ersten drei Methoden sind Näherungen, die von verschiedenen physikalisch sehr einfachen Vorstellungen ausgehen und zum Teil (vgl. insbesondere die "Reflexions-Methode" in 4.) nur sehr geringen Rechenauf-

wand erfordern. Die Güte dieser Näherungen läßt sich erst im Anschluß an die vierte Methode, die "Telegraphie-Methode", einfach abschätzen. Die Telegraphie-Methode ist im Rahmen unseres Modells exakt.

Die Bezeichnungen der verschiedenen theoretischen Methoden sollen an Aspekte ihrer Entstehung erinnern und sind weitgehend willkürlich.

In den folgenden Unterabschnitten von 3. werden einige für die theoretischen Methoden wichtige Beziehungen zusammengestellt.

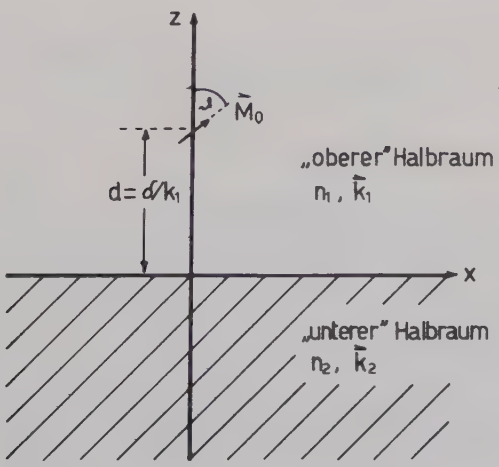


Fig.(3.1.-F): Das Modell:
Der elektrische Dipol über einem Spiegel.
Für die Polarisations-Methode wurde ein etwas anderes Koordinaten-System gewählt: vgl.(6.3.-F).
x,y,z-Achse bilden immer ein Rechtssystem.
n_2, $\tilde{k}_2$ können komplex sein.

3.2. Felder und Potentiale des elektrischen Dipols

Für einen elektrischen Dipol mit dem periodischen Moment

$$\vec{M} := \vec{M}_o \, e^{-i\omega t} \tag{3.2.-1}$$

erhält man im Dielektrikum durch Integration die retardierten elektrodynamischen Potentiale [1]

$$V = \frac{(\vec{r}^o \cdot \vec{M}_o)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2} (1-ikr) \, e^{i(kr-\omega t)} \tag{3.2.-2}$$

$$\vec{A} = -\frac{i\omega}{4\pi r} \vec{M}_o \, e^{i(kr-\omega t)} \tag{3.2.-3}$$

Durch Differentiation gewinnt man das elektrische Feld $\vec{E}$ und das Magnetfeld $\vec{H}$ des Dipols:

$$\vec{E} = -\mu\mu_o \dot{\vec{A}} - \operatorname{grad} V$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^3} \{ \vec{M}_o(k^2r^2+ikr-1) + \vec{r}^o(\vec{r}^o \cdot \vec{M}_o)(3-3ikr-k^2r^2) \} \, e^{i(kr-\omega t)} \tag{3.2.-4}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$= \frac{\omega}{4\pi r^2} [\vec{r}^o \times \vec{M}_o] \, (kr+i) \, e^{i(kr-\omega t)} \tag{3.2.-5}$$

---

[1] V und $\vec{A}$ werden im Anhang A1 definiert, in A2 und A3 diskutiert und in A5 für den Dipol (3.2.-1) berechnet.

Dabei ist

$k := 2\pi/\lambda = \omega/c$ der Betrag des Wellenvektors

$\varepsilon = n^2$ die relative Dielektrizitätskonstante des den Dipol umgebenden Mediums

ε_0 die absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$\vec{r}$ der Vektor vom Dipol zum Aufpunkt

$r := |r|$

$\vec{r}^{\,o} := \vec{r}/r$

Für große Abstände vom Dipol ($kr \gg 1$) geht (3.2.-4) in das elektrische Fernfeld $\vec{E}_F$ des Dipols über:

$$\vec{E}_F := \frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \{ \vec{M}_o - \vec{r}^{\,o}(\vec{r}^{\,o} \cdot \vec{M}_o) \} e^{i(kr-\omega t)} \qquad (3.2.-6)$$

Das magnetische Fernfeld erhält man aus (3.2.-5)

$$\vec{H}_F := \frac{\omega k}{4\pi r} [\vec{r}^{\,o} \times \vec{M}_o] e^{i(kr-\omega t)} \qquad (3.2.-7)$$

3.3. Zum Energiestrom

Die vom Dipol emittierte Energiestromdichte ist der Poyntingvektor

$$\vec{S} := Re(\vec{E}) \times Re(\vec{H}) \tag{3.3.-1}$$

Für den zeitlichen Mittelwert von $\vec{S}$ erhält man mit $T:=2\pi/\omega$

$$\bar{\vec{S}} := \overline{\vec{S}}^{t} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \vec{S}(t')\,dt' \tag{3.3.-2}$$

Berücksichtigt man $\overline{\vec{E}\times\vec{H}} = \overline{\vec{E}^*\times\vec{H}^*} = 0$ und $\vec{E}\times\vec{H}^* + \vec{E}^*\times\vec{H} = 2Re(\vec{E}\times\vec{H}^*) = 2Re(\vec{E}\times\vec{H}^*)$, so folgt mit (3.2.-4)f

$$\begin{aligned}\bar{\vec{S}} &= \frac{1}{4}\left\{\overline{\vec{E}\times\vec{H}} + \overline{\vec{E}\times\vec{H}^*} + \overline{\vec{E}^*\times\vec{H}} + \overline{\vec{E}^*\times\vec{H}^*}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\,Re(\vec{E}\times\vec{H}^*)\\ &= \frac{k^3\omega}{2\cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4\pi r^2}\,\vec{r}^{\,o}\left\{\vec{M}_o^{\,2} - (\vec{r}^{\,o}\cdot\vec{M}_o)^2\right\}\end{aligned} \tag{3.3.-3}$$

Daraus erhält man den mittleren Energiestrom durch eine den Dipol umgebende Kugelschale

$$\begin{aligned}S := \oint \bar{\vec{S}}\cdot d\vec{f} &= \frac{k^3\omega M_o^{\,2}}{2\cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4\pi}\int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta\,\sin^2\theta\\ &= \frac{k^3\omega M_o^{\,2}}{3\cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{3.3.-4}$$

S erweist sich als unabhängig von r. $\bar{\vec{S}}$ und S lassen sich auch allein aus dem elektrischen Fernfeld nach (3.2.-6) berechnen:

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon_0 c\,\vec{r}^{\,o}\,|\vec{E}_F|^2 = \varepsilon\varepsilon_0 c\,\vec{r}^{\,o}\,\overline{(Re\vec{E}_F)^2} \tag{3.3.-5}$$

Durch die Energieabstrahlung wird der Dipol-Oszillator gedämpft. Darauf gehen wir in 3.4.f ein.

3.4. Der gedämpfte Oszillator

Die Bewegungsgleichung eines gedämpft schwingenden Teilchens mit der Ladung e und der Masse m in einem harmonischen Potential lautet bei Abwesenheit äußerer Felder (vgl.3.6.)

$$m \ddot{\vec{r}} + m b_o \dot{\vec{r}} + m \omega_o^2 \vec{r} = 0 \qquad (3.4.-1)$$

Mit dem Dipolmoment $\vec{M} := e \vec{r}$ erhält man aus der äquivalenten Gleichung

$$\ddot{\vec{M}} + b_o \dot{\vec{M}} + \omega_o^2 \vec{M} = 0 \qquad (3.4.-2)$$

die Lösung [1]

$$\vec{M} = \vec{\mu}_o \, e^{-\frac{b_o t}{2} - i\omega_o t} \qquad (3.4.-3)$$

wobei wir uns auf das negative Vorzeichen des Imaginärteils des Exponenten beschränken: vgl. (3.2.-1).

Die Amplitude $\vec{M}_o$ des Dipolmoments $\vec{M}$ in (3.2.-1) ist also zeitabhängig:

$$\vec{M}_o = \vec{\mu}_o \, e^{-\frac{b_o t}{2}} \qquad (3.4.-4)$$

---

[1] Streng ist in (3.4.-3) ω_o zu ersetzen durch ω mit $\omega^2 = \omega_o^2 - b_o^2/4$. Für den numerisch untersuchten Fall ist jedoch nach (A8-3)f

$$\frac{\omega_o - \omega}{\omega_o} = \frac{(\omega_o-\omega)(\omega_o+\omega)}{\omega_o (\omega_o+\omega)} \approx \frac{\omega_o^2-\omega^2}{2\omega_o^2} = \frac{b_o^2}{8\omega_o^2}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1.4\cdot 10^3}{2\cdot 3\cdot 10^{15}}\right)^2 \approx 3\cdot 10^{-26}$$

und $\omega = \omega_o$ ist mit extremer Genauigkeit erfüllt.

In 3.2.f wurde strenge Periodizität von $\tilde{M}$ angenommen: vgl. etwa (3.2.-1). Die Ergebnisse von 3.2.f bleiben aber auch bei Berücksichtigung von (3.4.-4) mit großer Genauigkeit korrekt, weil sich $\tilde{M}_o$ gemäß A8 nur langsam ändert.

Für die Energie des Oszillators erhält man in sehr guter Näherung (vgl.Anm.1)

$$E_{Dip} = \frac{m\,\omega^2}{2\,e^2}\,\mu_o^2\,e^{-b_o t} = \frac{m\,\omega^2}{2\,e^2}\,|\tilde{M}_o|^2 \qquad (3.4.-5)$$

Die Energie klingt exponentiell mit der Zeit ab. Die "Dämpfungskonstante" b_o von (3.4.-1)f ist die Abklingkonstante der Energie E_{Dip}.

Die Anfangsenergie des Dipols ist

$$E^o_{Dip} := E_{Dip}(t:=0) = \frac{m\omega^2}{2e^2}\,\mu_o^2 \qquad (3.4.-6)$$

3.5. Lebensdauer, Abklingkonstante, Quantenausbeute und Energiestrom

Nach den allgemeinen Überlegungen in den vorangegangenen Abschnitten zeigen wir hier, wie die Lebensdauer eines gedämpften Dipols von den Dämpfungskonstanten und den Energieströmen abhängt.

Für die Energie E_{Dip} des Dipols kann man nach (3.4.-5) schreiben

$$E_{Dip} = E^{o}_{Dip}\, e^{-bt} \qquad (3.5.-1)$$

wobei wir gegenüber (3.4.-5) b_o durch b ersetzt haben, um anzudeuten, daß die "Dämpfungskonstante" hier nicht die des ungestörten Dipols von 3.4. zu sein braucht.

Als Lebensdauer des Dipols definiert man die Zeit τ, zu der die Energie des Dipols auf ein e-tel abgeklungen ist:

$$\tau := 1 / b \qquad (3.5.-2)$$

τ hängt mit der Energiestromdichte zusammen. Die Beziehungen werden besonders einfach, wenn der Dipol nur an das Strahlungsfeld Energie abgibt, wenn also die "Quantenausbeute" q = 1 ist, vgl.(3.5.-13). Beschränken wir uns zunächst auf q=1, so lautet der Energiesatz

$$E_e + E_{Dip} = \text{const.} = E^{o}_{Dip} \qquad (3.5.-3)$$

wobei E_e die Energie des Strahlungsfeldes ist. Für den Energiestrom S folgt mit (3.5.-1)

$$S := \frac{dE_e}{dt} = -\frac{dE_{Dip}}{dt} = b\, E_{Dip} \qquad (3.5.-4)$$

Insbesondere erhält man für den "Anfangsenergiestrom"

$$S_o := S(t:=0) = b\, E^o_{Dip} \qquad (3.5.-5)$$

Wir werden später zeigen, daß τ, S_o und b durch einen Spiegel beeinflußt werden können. τ_d, S^d_o und b^d seien Lebensdauer, Anfangsenergiestrom und totale Dämpfungskonstante bei Anwesenheit eines Spiegels im Abstand d vom Dipol; τ_∞, S^∞_o und b^∞ seien die entsprechenden Größen bei Abwesenheit des Spiegels ($d \to \infty$). Betrachtet man die Anfangsenergie E^o_{Dip} des Dipols als unabhängig von d, so folgt aus (3.5.-2) und (3.5.-5) für die Lebensdauern

$$\frac{\tau_d}{\tau_\infty} = \frac{b^\infty}{b^d} \qquad (3.5.-6)$$

$$\frac{\tau_d}{\tau_\infty} = \frac{S^\infty_o}{S^d_o} \qquad (3.5.-7)$$

Etwas komplizierter werden die Beziehungen zwischen den Lebensdauern und den Dämpfungskonstanten bzw. Energieströmen, wenn der Dipol nicht nur in das Strahlungsfeld Energie abgibt, sondern durch konkurrierende (insbesondere thermische) strahlungslose Prozesse ebenfalls Energie verlieren kann. Statt (3.5.-4) schreiben wir jetzt den in das Strahlungsfeld abgegebenen Energiestrom

$$S = \int_{-\infty}^{t} dt = b_e E_{Dip} \qquad (3.5.-8)$$

Der Anteil

$$dE_t = b_t E_{Dip}\, dt \qquad (3.5.-9)$$

der Dipolenergie geht nicht in das Strahlungsfeld.

Der Energiesatz lautet jetzt

$$E_e + E_t + E_{Dip} = \text{const.} = E^o_{Dip} \qquad (3.5.-10)$$

mit (3.5.-1) und (3.5.-8)f folgt

$$b = b_e + b_t \qquad (3.5.-11)$$

Aus (3.5.-8) erhält man noch für t:=0 als Verallgemeinerung von (3.5.-5)

$$S_o = b_e E^o_{Dip} \qquad (3.5.-12)$$

Als Quantenausbeute [1] q definieren wir das Verhältnis der insgesamt durch Strahlung emittierten Energie $E^\infty_e := E_e(t=\infty)$ zur Gesamtenergie E^o_{Dip}:

$$q := E^\infty_e / E^o_{Dip} \qquad (3.5.-13)$$

---

1) Der Begriff "Quantenausbeute" wird nicht einheitlich definiert. Insbesondere ist die hier definierte Quantenausbeute q des emittierenden Zustandes zu unterscheiden von der "Lumineszenz-Quantenausbeute" n := Zahl der emittierten zur Zahl der absorbierten Quanten: vgl./5/,S.237.

Aus (3.5.-1) und (3.5.-8) erhält man

$$E_e^{\infty} = \int_{E_e(t=0)}^{E_e(t=\infty)} dE_e = \int_0^{\infty} dt\, b_e\, E_{Dip} = \bar{E}_{Dip}\, b_e/b \qquad (3.5.-14)$$

Damit erweist sich q als das Verhältnis der Strahlungsdämpfungskonstanten b_e zur totalen Dämpfungskonstanten b :

$$q = b_e / b = b_e / (b_e+b_t) \qquad (3.5.-15)$$

(3.5.-2) ergibt für die Lebensdauer

$$\tau = q / b_e \qquad (3.5.-16)$$

Wir wollen jetzt Verallgemeinerungen von (3.5.-6)f für $q \neq 1$ herleiten, die für die theoretischen Methoden grundlegend sind.

b^d, b_e^d, S_o^d, τ_d, q_d seien totale Dämpfungskonstante, Strahlungsdämpfungskonstante, Anfangsenergiestrom, Lebensdauer und Quantenausbeute bei Anwesenheit eines Spiegels im Abstand d vom Dipol; b^{∞}, b_e^{∞}, S_o^{∞}, τ_{∞}, q_{∞} seien die entsprechenden Größen bei Abwesenheit des Spiegels: $d \to \infty$. Die "thermische" Dämpfungskonstante b_t und die Anfangsenergie E_{Dip}^o des Dipols betrachten wir als unabhängig von d.

Aus (3.5.-15) ergibt sich

$$q_d = \frac{b_e^d}{b_e^d + b_t} ; \qquad q_{\infty} = \frac{b_e^{\infty}}{b_e^{\infty} + b_t} \qquad (3.5.-17)$$

$$S = dE_e / dt = b_e E_{Dip} \qquad (3.5.-8)$$

Der Anteil

$$dE_t = b_t E_{Dip}\, dt \qquad (3.5.-9)$$

der Dipolenergie geht nicht in das Strahlungsfeld.

Der Energiesatz lautet jetzt

$$E_e + E_t + E_{Dip} = \text{const.} = E^o_{Dip} \qquad (3.5.-10)$$

mit (3.5.-1) und (3.5.-8)f folgt

$$b = b_e + b_t \qquad (3.5.-11)$$

Aus (3.5.-8) erhält man noch für t:=0 als Verallgemeinerung von (3.5.-5)

$$S_o = b_e E^o_{Dip} \qquad (3.5.-12)$$

Als Quantenausbeute [1] q definieren wir das Verhältnis der insgesamt durch Strahlung emittierten Energie $E^\infty_e := E_e(t=\infty)$ zur Gesamtenergie E^o_{Dip}:

$$q := E^\infty_e / E^o_{Dip} \qquad (3.5.-13)$$

---

1) Der Begriff "Quantenausbeute" wird nicht einheitlich definiert. Insbesondere ist die hier definierte Quantenausbeute q des emittierenden Zustandes zu unterscheiden von der "Lumineszenz-Quantenausbeute" η := Zahl der emittierten zur Zahl der absorbierten

Aus (3.5.-1) und (3.5.-8) erhält man

$$E_e^{\infty} = \int_{E_e(t=0)}^{E_e(t=\infty)} dE_e = \int_0^{\infty} dt\; b_e\, E_{Dip} = E_{Dip}^{\circ}\, b_e/b \qquad (3.5.-14)$$

Damit erweist sich q als das Verhältnis der Strahlungsdämpfungskonstanten b_e zur totalen Dämpfungskonstanten b :

$$q = b_e / b = b_e / (b_e + b_t) \qquad (3.5.-15)$$

(3.5.-2) ergibt für die Lebensdauer

$$\tau = q / b_e \qquad (3.5.-16)$$

Wir wollen jetzt Verallgemeinerungen von (3.5.-6)f für $q \neq 1$ herleiten, die für die theoretischen Methoden grundlegend sind.

b^d, b_e^d, S_o^d, τ_d, q_d seien totale Dämpfungskonstante, Strahlungsdämpfungskonstante, Anfangsenergiestrom, Lebensdauer und Quantenausbeute bei Anwesenheit eines Spiegels im Abstand d vom Dipol; b^{∞}, b_e^{∞}, S_o^{∞}, τ_{∞}, q_{∞} seien die entsprechenden Größen bei Abwesenheit des Spiegels: $d \to \infty$. Die "thermische" Dämpfungskonstante b_t und die Anfangsenergie E_{Dip}° des Dipols betrachten wir als unabhängig von d.

Aus (3.5.-15) ergibt sich

$$q_d = \frac{b_e^d}{b_e^d + b_t}\;; \qquad q_{\infty} = \frac{b_e^{\infty}}{b_e^{\infty} + b_t} \qquad (3.5.-17)$$

oder nach b_t aufgelöst

$$b_t = b_e^d \left(\frac{1}{q_d} - 1 \right) = b_e^\infty \left(\frac{1}{q_\infty} - 1 \right) \qquad (3.5.-18)$$

Es folgt

$$\frac{b_e^d / q_d}{b_e^\infty / q_\infty} = \frac{1 - q_\infty}{1 - q_d} \qquad (3.5.-19)$$

und mit (3.5.-16) erhält man den Zusammenhang zwischen Lebensdauern und Quantenausbeuten [2)]

$$\frac{\tau_d}{\tau_\infty} = \frac{1 - q_d}{1 - q_\infty} \qquad (3.5.-20)$$

bzw.

$$q_d = 1 - \frac{\tau_d}{\tau_\infty} (1 - q_\infty) \qquad (3.5.-21)$$

Setzt man q_d aus (3.5.-20) in (3.5.-18) ein, so ergibt sich die Abhängigkeit der Lebensdauern von den Strahlungsdämpfungskonstanten

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + q_\infty \left(\frac{b_e^d}{b_e^\infty} - 1 \right) \qquad (3.5.-22)$$

[2)] Bei Drexhage, /7/, sieht die dortige Gl.(7) komplizierter aus als unsere Gl.(3.5.-21):

$$\eta_x = \left[1 + \frac{\tau_x}{\tau_\infty} \left(\frac{1}{\eta_\infty} - 1 \right) \right]^{-1} ; \qquad (7)$$

In (7) bedeuten aber τ_x, τ_∞ nicht die wahren Lebensdauern, sondern die Lebensdauern eines hypothetischen Dipols mit der Quantenausbeute $\eta_\infty := 1$. Berücksichtigt man die Umrechnung von τ_x, τ_∞ in die wahren Lebensdauern τ_x', τ_∞' nach /7/, Gl.(6), so erhält man unsere einfachere Gl.(3.5.-21).

Da E^{o}_{Dip} nicht vom Spiegel abhängen soll, erhält man aus (3.5.-12) die Abhängigkeit der Lebensdauern von den Anfangsenergieströmen

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + q_\infty \left(\frac{S^d_\infty}{S^o_o} - 1 \right) \qquad (3.5.-23)$$

Für $q_\infty=1$ gehen (3.5.-22)f in (3.5.-6)f über.

Gemäß (3.5.-22)f kann die Variation der Lebensdauern also sowohl über die Variation der Dämpfungskonstanten wie über die Variation der Anfangsenergieströme beschrieben werden; dabei erscheint (3.5.-22) wegen der Proportionalität von S_o und b_e gemäß (3.5.-12) zunächst als triviale Folgerung von (3.5.-23). Für uns ist (3.5.-22) deshalb wichtig, weil sich die Variation von b_e ohne Untersuchung der Energieströme über das "reflektierte Eigenfeld" beschreiben läßt. Damit werden durch (3.5.-22)f zwei verschiedene Verfahren zur Bestimmung von τ_∞/τ_d angedeutet. Wir führen in 3.7. für den idealen Spiegel beide Varianten durch. Bei der Interferenz-Methode in 5. wird die Variation von τ über die Energieströme ausführlich dargestellt. In den drei anderen theoretischen Methoden wird die Variation der Lebensdauern gemäß (3.5.-22) über die Dämpfungskonstanten beschrieben, dieses Verfahren soll deshalb im folgenden Abschnitt 3.6. näher diskutiert werden.

3.6. Der gedämpfte Oszillator im reflektierten Eigenfeld

Herrscht am Dipolort ein elektrisches Feld $\vec{E}_o$ parallel zu $\vec{M}$, so geht (3.4.-2) über in

$$\ddot{M} + b_o \dot{M} + \omega_o^2 M = \frac{e^2}{m} E_o \qquad (3.6.-1)$$

E_o soll nun nicht nur dieselbe - noch zu bestimmende - Frequenz $\tilde{\omega}$ wie der Dipol haben, soll also nicht nur "Resonanzfeld" sein, sondern es soll auch noch denselben zeitlichen Abfall mit der - ebenfalls noch zu bestimmenden - Abklingkonstanten b/2 wie der Dipol haben. Ein solches Feld wollen wir "reflektiertes Eigenfeld" nennen.

In der Zerlegung

$$\alpha := \frac{e^2}{m} Re(E_o/M) \qquad (3.6.-2)$$

$$\beta := \frac{e^2}{\tilde{\omega} m} Im(E_o/M) \qquad (3.6.-3)$$

sollen also α und β zeitunabhängig sein.

Falls $\vec{E}_o$ nicht parallel zu $\vec{M}$ ist, ersetzen wir

$$E_o \rightarrow \vec{E}_o \cdot \vec{M}^o = (\vec{E}_o \cdot \vec{M}) / M$$

in (3.6.-1)ff, betrachten also nicht die zu $\vec{M}$ senkrechte Komponente des reflektierten Eigenfeldes, die zu einer Drehung des Dipols führen kann [1].

---

[1] Für eine Untersuchung der Rotation dürfte das Modell des "freien" Dipols von 3.1. nicht ausreichend sein: Potentiale im Komplex I nach (2.1.-1) sowie thermische Einflüsse müßten berücksichtigt werden.

Nach der exakten Telegraphie-Methode tritt in den Hauptlagen des Dipols (parallel und senkrecht zur Grenzfläche) keine zu $\vec{M}$ senkrechte Komponente von $\vec{E}_o$ auf: vgl. 7.7.2., 7.7.3.

Mit (3.6.-2)f erhält man aus (3.6.-1)

$$\ddot{M} + b_o \dot{M} + \omega_o^2 M = \alpha M + i \tilde{\omega} \beta \dot{M} \qquad (3.6.-4)$$

Der Ansatz

$$M = \mu_o e^{-\frac{b}{2}t - i\tilde{\omega}t} \qquad (3.6.-5)$$

liefert nach Trennung von Real- und Imaginär-Teil

$$b = b_o + \beta \qquad (3.6.-6)$$

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_o^2 - \alpha + \frac{\beta^2}{4} - \frac{b_o^2}{4} \qquad (3.6.-7)$$

Man kann abschätzen, daß im allgemeinen in guter Näherung $\tilde{\omega} \approx \omega \approx \omega_o$ ist. Wir werden uns daher im folgenden nur mit (3.6.-6) beschäftigen.

Bei dem in der vorliegenden Arbeit diskutierten Problem wird das reflektierte Eigenfeld am Dipolort durch den Spiegel hervorgerufen. Es ist also, wie man leicht aus (7.7.-6) und (7.7.-9) für die Telegraphie-Methode, und damit gemäß 8. auch für die Näherungs-Methoden, verifiziert,

$$\beta \to 0 \qquad \text{für} \quad d \to \infty \qquad (3.6.-8)$$

Dann wird nach (3.6.-6) $b^\infty = b_o$ und mit der Definition der Lebensdauer in (3.5.-2) folgt

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + \beta / b^\infty \qquad (3.6.-9)$$

Nun ist nach (3.5.-4), (3.3.-4) sowie (3.4.-6)

$$E_e^\infty = \int_0^\infty dt\, S(t) = \frac{k^3 \omega \mu_o^2}{3 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_o b}$$

$$= \frac{k^3 \omega 2e^2 E_{Dip}^o}{3 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_o b m \omega^2} \qquad (3.6.-10)$$

und wir erhalten mit der Definition der Quantenausbeute in (3.5.-13)

$$q := E_e^\infty / E_{Dip}^o = \frac{2\, e^2\, k^3}{3 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_o\, m\, b\, \omega} \qquad (3.6.-11)$$

insbesondere also

$$\frac{1}{b^\infty} = \frac{3}{2}\, q_\infty \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_o\, m\, \omega}{e^2\, k^3} \qquad (3.6.-12)$$

Unter Berücksichtigung von (3.6.-3) folgt damit aus (3.6.-9)

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + \frac{3}{2}\, q_\infty \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_o\, m\, \omega\, e^2}{k^3\, e^2\, \omega\, m}\, Im \frac{(\vec{E}_o \cdot \vec{M})}{M^2} \qquad (3.6.-13)$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\vec{F} := \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}{k^3} \frac{\vec{E}_o}{M_o e^{-i\omega t}} \quad ; \quad F := \vec{F} \cdot \vec{M}_o^o \qquad (3.6.-14)$$

so erhalten wir schließlich

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + \frac{3}{2}\, q_\infty\, Im F \qquad (3.6.-15)$$

3.7. Der ideale Spiegel

Nach der Spiegelungs-Methode der Elektrostatik läßt sich für einen idealen Spiegel das reflektierte Eigenfeld am Dipolort leicht angeben:

$$\vec{E}_o = \frac{k^3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o\Delta^3} e^{-i(\Delta-\omega t)} \{ M_o' (\Delta^2+i\Delta-1) + \\ + \vec{r}^o(\vec{r}^o\cdot\vec{M}_o')(3-3i\Delta-\Delta^2)\} \quad (3.7.-1)$$

vgl.(3.2.-4). Zur Abkürzung wurde $\Delta:=2kd$ gesetzt mit d aus (3.1.-F). $\vec{M}_o'$ ist das Moment des "Spiegeldipols", vgl.(3.7.-F). $\vec{r}^o$ zeigt vom Spiegeldipol zum Originaldipol.

Mit (3.6.-14) folgt

$$F = \frac{1}{\Delta^3}e^{i\Delta}\{(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)(\Delta^2+i\Delta-1)+\cos^2\vartheta(3-3i\Delta-\Delta^2)\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^3}e^{i\Delta}\{ 2(1-i\Delta)\cos^2\vartheta + (1-i\Delta-\Delta^2)\sin^2\vartheta \} \quad (3.7.-2)$$

Mit (3.6.-15) ergibt sich für den senkrechten Dipol ($\vartheta:=0$)

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^\perp} = 1 + 3\,q_\infty \left(\frac{\sin\Delta}{\Delta^3} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2} \right) \quad (3.7.-3)$$

und für den parallelen Dipol ($\vartheta:=\pi/2$)

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^\parallel} = 1 + \frac{3}{2}\,q_\infty \left(\frac{\sin\Delta}{\Delta^3} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2} - \frac{\sin\Delta}{\Delta} \right) \quad (3.7.-4)$$

Die Herleitung der Gleichungen (3.7.-3)f erfolgte gemäß (3.6.-15)f konkret über das "reflektierte Eigenfeld", geht aber wegen (3.6.-3), (3.6.-6) letzlich auf die Abhängigkeit der Lebensdauer τ von b_e gemäß (3.5.-22) zurück. Nun ist b_e nach (3.5.-8) die Strahlungs-Dämpfungskonstante. Es erscheint daher naheliegend, direkt das Strahlungsfeld zu untersuchen, also die Variation von τ gemäß (3.5.-23) über die Variation der Energieströme S_o zu berechnen. Dieses Verfahren ist sehr ausführlich in 5. dargestellt, wir beschränken uns daher hier beim idealen Spiegel auf die wesentlichen Schritte.

Für weit entfernte Aufpunkte ($kr>>1$) geht das elektrische Feld $\vec{E}$ nach (3.2.-4) des Original-Dipols $\vec{M}$ in das Fernfeld $\vec{E}_F$ nach (3.2.-6) über. Entsprechend erhält man für das Fernfeld $\vec{E}'_F$ des Spiegel-Dipols $\vec{M}'$

$$\vec{E}'_F = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r'} \{\vec{M}'_o - \vec{r}^{o'}(\vec{r}^{o'}\cdot\vec{M}'_o)\}\, e^{i(kr'-\omega t)} \qquad (3.7.-5)$$

wobei $\vec{r}'$ vom Ort des Spiegeldipols zum Aufpunkt zeigt; bzgl. $\vec{M}'$ vgl.(3.7.-F). Für weit entfernte Aufpunkte ist $\vec{r}^{o'}=\vec{r}^{o}$; außerdem können wir im Nenner von (3.7.-5) $r'=r$ setzen, dagegen ist im schnellveränderlichen Exponenten

$$r' = r + D\,; \qquad D = D(\theta) = 2\,d\cos\theta \qquad (3.7.-6)$$

gemäß (5.2.-F) zu berücksichtigen.

Damit ist das Gesamtfeld im oberen Halbraum

$$\vec{E}_F^o = \vec{E}_F + \vec{E}_F' = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\{[\vec{M}_o - \vec{r}^o(\vec{r}^o\cdot\vec{M}_o)] + [\vec{M}_o' - \vec{r}^o(\vec{r}^o\cdot\vec{M}_o')]\cdot e^{ikD}\}\, e^{i(kr-\omega t)} \qquad (3.7.-7)$$

Für den parallelen Dipol ist gemäß (3.7.-F) $\vec{M}_o' = -\vec{M}_o$ und nach (5.2.-F) gilt $\vec{r}^o\cdot\vec{M}_o^o = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\cos\phi = \sin\theta\cos\phi$. Mit der Abkürzung $\Delta := 2kd$ folgt

$$|\vec{E}_{F\rightarrow}^o|^2 = (\frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r})^2 M_o^2 (1-\sin^2\theta\cos^2\phi)\cdot \cdot 2[1-\cos(\Delta\cos\theta)] \qquad (3.7.-8)$$

Setzt man $\gamma := \cos\theta$, so erhält man nach (3.3.-4)f für den insgesamt vom Dipol emittierten Energiestrom

$$S_{\rightarrow} = S_{\rightarrow}^d = \int_{HK} \vec{\bar{S}}_{\rightarrow}\cdot d\vec{f} = \int_{HK} \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_o c |\vec{E}_{F\rightarrow}^o|^2\, \vec{r}^o\cdot d\vec{f}$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_o c (\frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o})^2 M_o^2 \, 2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\gamma (\sin^2\phi + \gamma^2\cos^2\phi)\cdot \cdot (1-\cos\Delta\gamma) \qquad (3.7.-9)$$

wobei nur über die obere Halbkugel *HK* zu integrieren ist: Nur in den oberen Halbraum wird Energie emittiert.

Mit

$$\int_0^1 d\gamma\, \gamma^2 \cos\Delta\gamma = \frac{\sin\Delta}{\Delta} + \frac{2\cos\Delta}{\Delta^2} - \frac{2\sin\Delta}{\Delta^3} \qquad (3.7.-10)$$

wird

$$\int_0^1 d\gamma(1+\gamma^2)(1-\cos\Delta\gamma) = \int_0^1 d\gamma\ (1+\gamma^2-\cos\Delta\gamma-\gamma^2\cos\Delta\gamma)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{\sin\Delta}{\Delta} - \frac{\sin\Delta}{\Delta} - \frac{2\cos\Delta}{\Delta^2} + \frac{2\sin\Delta}{\Delta^3} \qquad (3.7.-11)$$

Unter Berücksichtigung von (3.4.-4), (3.5.-5) erhält man also für t:=0

$$S^d_{o\rightarrow} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_o c\left(\frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\right)^2 \mu_o^2 2\pi 2\left(\frac{2}{3} - \frac{\sin\Delta}{\Delta} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2} + \frac{\sin\Delta}{\Delta^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k^4 c\mu_o^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\left(\frac{2}{3} + \frac{\sin\Delta}{\Delta^3} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2} - \frac{\sin\Delta}{\Delta}\right) \qquad (3.7.-12)$$

$S^d_{o\rightarrow}$ hängt über $\Delta=2kd$ von d ab, Für $d \to \infty$ erhält man

$$S^\infty_{o\rightarrow} = \frac{k^4\ c\ \mu_o^2}{3\cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_o} \qquad (3.7.-13)$$

was wegen $\omega=kc$ (vgl. 3.2.) mit (3.3.-4) übereinstimmt. Damit ergibt (3.5.-23)

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + q_\infty\left(\frac{S^d_{o\rightarrow}}{S^\infty_{o\rightarrow}} - 1\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} q_\infty\left(\frac{\sin\Delta}{\Delta^3} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2} - \frac{\sin\Delta}{\Delta}\right) \qquad (3.7.-14)$$

in Übereinstimmung mit (3.7.-4).

Für den senkrechten Dipol ist nach (3.7.-F) $\vec{M}'_o=\vec{M}_o$ und nach (5.2.-F) $\vec{r}^o\cdot\vec{M}^o_o=\cos\theta=\gamma$. Damit ergibt (3.7.-7)

$$|\vec{E}^o_F|^2 = \left(\frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\right)^2 M_o^2\ (1-\gamma^2)\ 2\ (1-\cos\Delta\gamma) \qquad (3.7.-15)$$

Mit

$$\int_0^1 d\gamma(1-\gamma^2)(1+\cos\Delta\gamma) = \int_0^1 d\gamma(1-\gamma^2+\cos\Delta\gamma-\gamma^2\cos\Delta\gamma)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\sin\Delta}{\Delta} - \frac{\sin\Delta}{\Delta} - \frac{2\cos\Delta}{\Delta^2} + \frac{2\sin\Delta}{\Delta^3} \qquad (3.7.-16)$$

wird analog zu (3.7.-9), (3.7.-12)

$$S^d_{o\uparrow} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_o c\left(\frac{k^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\right)^2 \cdot \mu_o^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\sin\Delta}{\Delta^3} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2}\right) \qquad (3.7.-17)$$

Für $d \to \infty$ wird

$$S^\infty_{o\uparrow} = \frac{k^4\, c\, \mu_B^2}{3 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_o} = S^\infty_{o\rightarrow} =: S_o \qquad (3.7.-18)$$

und (3.5.-23) ergibt

$$\frac{\tau_\infty}{\tau^L_d} = 1 + q_\infty \left(\frac{S^d_{o\uparrow}}{S^\infty_o} - 1\right)$$

$$= 1 + 3\, q_\infty \left(\frac{\sin\Delta}{\Delta^3} - \frac{\cos\Delta}{\Delta^2}\right) \qquad (3.7.-19)$$

in Übereinstimmung mit (3.7.-3).

Es mag zunächst verwunderlich erscheinen, daß sich die Variation der Lebensdauern sowohl über die direkte Einwirkung auf den Dipol (reflektiertes Eigenfeld) nach (3.6.-14)f bzw. (3.6.-9) wie über das Strahlungsfeld nach (3.5.-23) beschreiben läßt. Die Äquivalenz der Beschreibungen wird deutlich, wenn man bedenkt, daß das reflektierte Eigenfeld nach (3.6.-6) eine Änderung der totalen Dämpfungskonstanten b verursacht, die nach (3.5.-12) und (3.5.-15) proportional der Strahlungs-Dämpfungskonstanten b_e und dem Anfangs-Energiestrom S_o ist: $S_o = b_e \cdot E^o_{Dip} = q \cdot b \cdot E^o_{Dip}$.

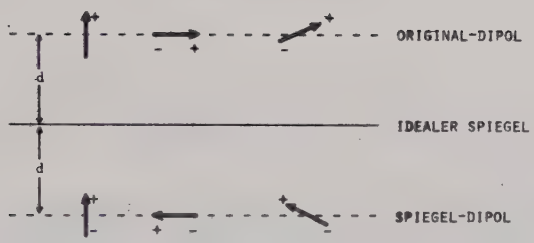


Fig.(3.7.-F): Die Spiegelungs-Methode der Elektrostatik für das Dipolmoment.

3.8. Allgemeines zu den Vergleichen von Theorie und Experiment

Im Anschluß an jede der vier untersuchten theoretischen Methoden geben wir eine Darstellung ihrer Ergebnisse

$$TR := \tau(\delta) / \tau(\infty)$$

für vier verschiedene Spiegel und vergleichen sie mit den entsprechenden experimentellen Resultaten. Dabei bedeuten

--------	:= $\tau^{\parallel}$:	theoretische Ergebnisse für den parallelen Dipol ($\vartheta := \pi/2$)
....	:= $\tau^{\perp}$:	theoretische Ergebnisse für den senkrechten Dipol ($\vartheta := 0$)
————	:= τ^{is} :	theoretische Ergebnisse für isotrope Verteilung nach (A7-23)
xxxxxxxx	:= τ^{exp} :	experimentelle Ergebnisse

Für vier verschiedene Spiegel (Halbräume H2) werden Theorie und Experiment verglichen:

Silber	Ag	$n_2 := 0.10 + 4.0\,i$
Gold	Au	$n_2 := 0.47 + 3.6\,i$
Kupfer	Cu	$n_2 := 0.35 + 2.6\,i$
Vakuum	Vak	$n_2 := 1$

Die Brechungsindizes für die Metalle wurden aus den in /18/,Bd.II/8 für aufgedampfte Schichten angegebenen auf $\lambda := 612$ nm interpoliert; sie weichen etwas von den in /6/,S.106 für massive (?) Metalle genommenen ab. Die Quantenausbeute wurde $q_\infty := 1$ gesetzt.

Die Abzissen der Meßpunkte sind

$$\delta := k_1 d = k_1 m d_o$$

mit

$$k_1 := 2\pi n_1 / \lambda_o$$

vgl.3.2.; $m := m_D + 1$ ist die effektive Zahl der Deckschichten, vgl.2.3. Für TPT wurde ebenso wie für C_{20} $n_1 := 1.52$ und $d_o := 26.4$ gesetzt, vgl.etwa /9/, S.64 und 76.

Die experimentellen Ergebnisse für die Metallspiegel Ag, Au, Cu wurden von Drexhage, /6/,S.106f übernommen, die experimentellen Ergebnisse für die rein dielektrische Grenzfläche ("Vakuum-Spiegel") sind identisch mit den in (2.3.-F) dargestellten.

Experimentelle und theoretische Ergebnisse $\tau = \tau(\delta)$ wurden direkt von dem in der ZRA vorhandenen Calcomb-Plotter 563 gezeichnet: vgl./O/.

4. Die Reflexions-Methode

4.1. Einleitung

Als erste Näherung soll eine von H. Kuhn 1970 publizierte Methode (vgl./16/) betrachtet werden, die nur sehr geringen mathematischen Aufwand erfordert.

In 4.2. wird versucht, das reflektierte Eigenfeld (vgl.3.6.) in Analogie zur Reflexion ebener Wellen zu bestimmen. Die erhaltenen Ergebnisse stimmen für den Grenzfall des idealen Spiegels nicht mit den Ergebnissen von 3.7. überein und werden daher in 4.3. modifiziert.

Eine kurze Diskussion der Reflexions-Methode folgt in 4.4. Eine quantitative Abschätzung der Güte dieser Methode ist erst im Anschluß an die Telegraphie-Methode möglich: vgl.8.1.

4.2. Der Reflexions-Ansatz

Fällt eine ebene Welle $\vec{E}_i$ mit der Amplitude A_i aus einem "oberen" Halbraum H1 auf die ebene Grenzfläche eines "unteren" Halbraums H2 - vgl.Fig.(3.1.-F)- so läßt sich die Wirkung von H2 in H1 durch eine zusätzliche ebene Welle $\vec{E}_r$, die reflektierte Welle, beschreiben. Die Richtung der Wellennormalen (=Richtung des Energiestroms) von $\vec{E}_r$ ist durch das Gesetz der regulären Reflexion festgelegt, die Amplitude der reflektierten Welle ist $A_r=\rho A_i$. Der durch die Fresnelschen Formeln (vgl.etwa /27/,S.503,510 oder 7.6.4.) gegebene, im allgemeinen komplexe Reflexionskoeffizient ρ hängt außer von den optischen Konstanten n_1, n_2 der beiden Halbräume nur vom Einfallswinkel θ ab.

Für große Entfernungen vom Dipol kann man das elektrische Feld des Dipols stückweise durch ebene Wellen ersetzen. Die Ergebnisse für die Reflexion ebener Wellen werden sich also näherungsweise auf das elektrische Fernfeld (3.2.-6) erweitern lassen. Nimmt man an, daß sie auch auf das vollständige Dipolfeld (3.2.-4) anwendbar sind, kann man das reflektierte Eigenfeld (vgl.3.6.) am Dipolort sofort hinschreiben:

$$\vec{E}_o = \rho \cdot \vec{E}(r:=2\cdot d) \qquad (4.2.-1)$$

mit $\vec{E}$ aus (3.2.-4). Durch $r:=2\cdot d$ und d wie in Fig. (3.1.-F) berücksichtigt man den Weg der Welle senkrecht zum Spiegel und zurück.

Die Richtung $\vec{r}^{\,o}$ vom Dipol zum Aufpunkt ist die "Strahlen-Richtung" im Sinne der Kristalloptik: Der Energiestrom $\vec{S}$ hat nach (3.3.-3) die Richtung $\vec{r}^{\,o}$. Wir betrachten zunächst als "Einfallswinkel" θ für ρ den Winkel zwischen $\vec{r}^{\,o}$ und der Grenzflächen-Normalen. Dann ist

$$\theta := 0 \qquad (4.2.-2)$$

zu wählen: Nur bei senkrechtem Einfall auf den Spiegel trifft der reflektierte Strahl den Dipol.

Bei senkrechtem Einfall unterscheiden sich die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten für die zur Einfallsebene parallelen und senkrechten Komponenten höchstens durch das Vorzeichen ($\rho_p = \pm\rho_s$), wobei das Vorzeichen von ρ_p in der Literatur nicht einheitlich definiert ist. Wir setzen also

$$\rho := \rho_s = R_s\, e^{i\delta_s} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad (4.2.-3)$$

Zur letzten Gleichung vergleiche man etwa (7.6.-9) oder Weizel,/27/,S.504,Gl.(24).

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\Delta := 2\,k\,d \qquad (4.2.-4)$$

so folgt mit (3.2.-4) aus (4.2.-1)

$$\vec{E}_o = \frac{k^3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o\Delta^3}\,\rho_s\, e^{i(\Delta-\omega t)} \cdot$$

$$\cdot \{\vec{M}_o(\Delta^2+i\Delta-1) + \vec{r}^{\,o}(\vec{r}^{\,o}\cdot\vec{M}_o)(3-3i\Delta-\Delta^2)\} \qquad (4.2.-5)$$

und gemäß (3.6.-14) wird

$$F = \frac{\rho_s}{\Delta^3}\, e^{i\Delta}\, \{(\Delta^2+i\Delta-1) + \cos^2\vartheta\,(3-3i\Delta-\Delta^2)\} \qquad (4.2.-6)$$

4.3. Analogie zum idealen Spiegel

Für den idealen Spiegel ist $\rho_s := -1$ zu setzen. Ersichtlich stimmt dann F nach (4.2.-6) nicht mit F aus (3.7.-2) überein. Man erkennt durch genaueren Vergleich von (4.2.-6) mit (3.7.-2) sogar leicht, daß auch eine andere Wahl von ρ nicht die Ergebnisse für den idealen Spiegel liefern kann. Das reflektierte Dipolfeld läßt sich also nicht durch einen Ansatz (4.2.-1) beschreiben.

Ein genauerer Vergleich von (4.2.-6) für den Grenzfall des idealen Spiegels ($\rho_s := -1$) mit (3.7.-2) zeigt, daß der parallele Dipol ($\vartheta = \pi/2$) durch (4.2.-6) richtig beschrieben wird, daß sich dagegen für den senkrechten Dipol ($\vartheta = 0$) ein falsches Vorzeichen ergibt. Offenbar berücksichtigt der Ansatz (4.2.-1) nicht, daß durch den idealen Spiegel nach (3.7.-F) nur die parallele Komponente des Dipols, nicht dagegen die senkrechte "gespiegelt" wird, vgl. auch 4.4.

Es liegt nahe, (4.2.-6) so zu modifizieren, daß sich (3.7.-2) für $\rho_s := -1$ ergibt:

$$F := \frac{\rho_s}{\Delta^3} e^{i\Delta} \{(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)(\Delta^2 + i\Delta - 1) + \cos^2\vartheta(3 - 3i\Delta - \Delta^2)\}$$

$$= \frac{R_s}{\Delta^3} e^{i(\Delta+\delta_s)} \{2(i\Delta - 1)\cos^2\vartheta + (\Delta^2 + i\Delta - 1)\sin^2\vartheta\} \quad (4.3.-1)$$

Mit (3.6.-15) erhält man die Lebensdauern für den parallelen und den senkrechten Dipol sowie für isotrope Verteilung gemäß (A7-23):

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\rightarrow}} = 1 + \frac{3}{2}R_s q_\infty\{-\frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta^3} + \frac{\cos(\Delta+\delta_s)}{\Delta^2} + \frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta}\} \quad (4.3.-2)$$

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\uparrow}} = 1 + 3R_s q_\infty\{-\frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta^3} + \frac{\cos(\Delta+\delta_s)}{\Delta^2}\} \quad (4.3.-3)$$

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\downarrow}s} = 1 + R_s q_\infty\{-2\frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta^3} + 2\frac{\cos(\Delta+\delta_s)}{\Delta^2} + \frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta}\} \quad (4.3.-4)$$

Für $\delta_s \rightarrow -\delta$ und $\Delta \rightarrow \gamma$ stimmen (4.3.-2)f mit /16/,Gl.(1o) und Gl.(12) überein.

4.4. Kurze Diskussion

In 4.2. wurde versucht, das reflektierte Dipolfeld durch einen Ansatz (4.2.-1) analog zur Reflexion ebener Wellen zu beschreiben. Es zeigte sich, vgl. 4.3., daß für den Grenzfall des idealen Spiegels zwar der parallele Dipol richtig beschrieben wird, nicht dagegen der senkrechte.

Das ist nicht verwunderlich, da in der Reflexions-Methode $\tau_d^{\rightarrow}$ durch die transversale, $\tau_d^{\uparrow}$ dagegen durch die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes bestimmt wird. Man kann nicht erwarten, daß sich die Ergebnisse für die Reflektion transversaler ebener Wellen auf longitudinale Wellen übertragen lassen.

Es ist daher auch nicht leicht, die Güte der Reflexions-Methode abzuschätzen: Der parallele Dipol sollte zwar für $\Delta \gg 1$ richtig beschrieben werden, der senkrechte Dipol wird für $\Delta \gg 1$ dagegen gar nicht beeinflußt, weil das Fernfeld (3.2.-6) keine longitudinale Komponente besitzt.

Erst die Ergebnisse der Telegraphie-Methode zeigen korrekt, daß die Gleichungen von 4.3. konsequente Näherungen für $\Delta \gg 1$ sind und liefern Möglichkeiten für qualitative und quantitative Abschätzungen, vgl.8.1.

Die besonderen Vorteile der Reflexions-Methode sind der sehr geringe Rechenaufwand sowie die übersichtliche und einfache Form der Ergebnisse.

4.5. Vergleich mit dem Experiment

Die Ergebnisse (4.3.-2)ff der Reflexions-Methode sind in (4.-F) für vier verschiedene Spiegel dargestellt. Zu den Bezeichnungen und Daten vergleiche man 3.8.

Bei den Metallspiegeln stimmen die Messungen mit den theoretischen Kurven für parallele Dipolstellung und isotrope Verteilung gut überein, die senkrechte Dipolstellung kann ausgeschlossen werden (vgl.10.6.). Die Messungen an der rein dielektrischen Grenzfläche werden nur schlecht und höchstens durch den senkrechten Dipol beschrieben.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen (7.-F) der im Rahmen des Modells von 3.1. exakten Telegraphie-Methode zeigt, daß die Reflexions-Methode von den drei Näherungsverfahren für die Metallspiegel die besten, für den dielektrischen Spiegel dagegen keine guten Ergebnisse liefert, vgl. dazu auch 8.1.

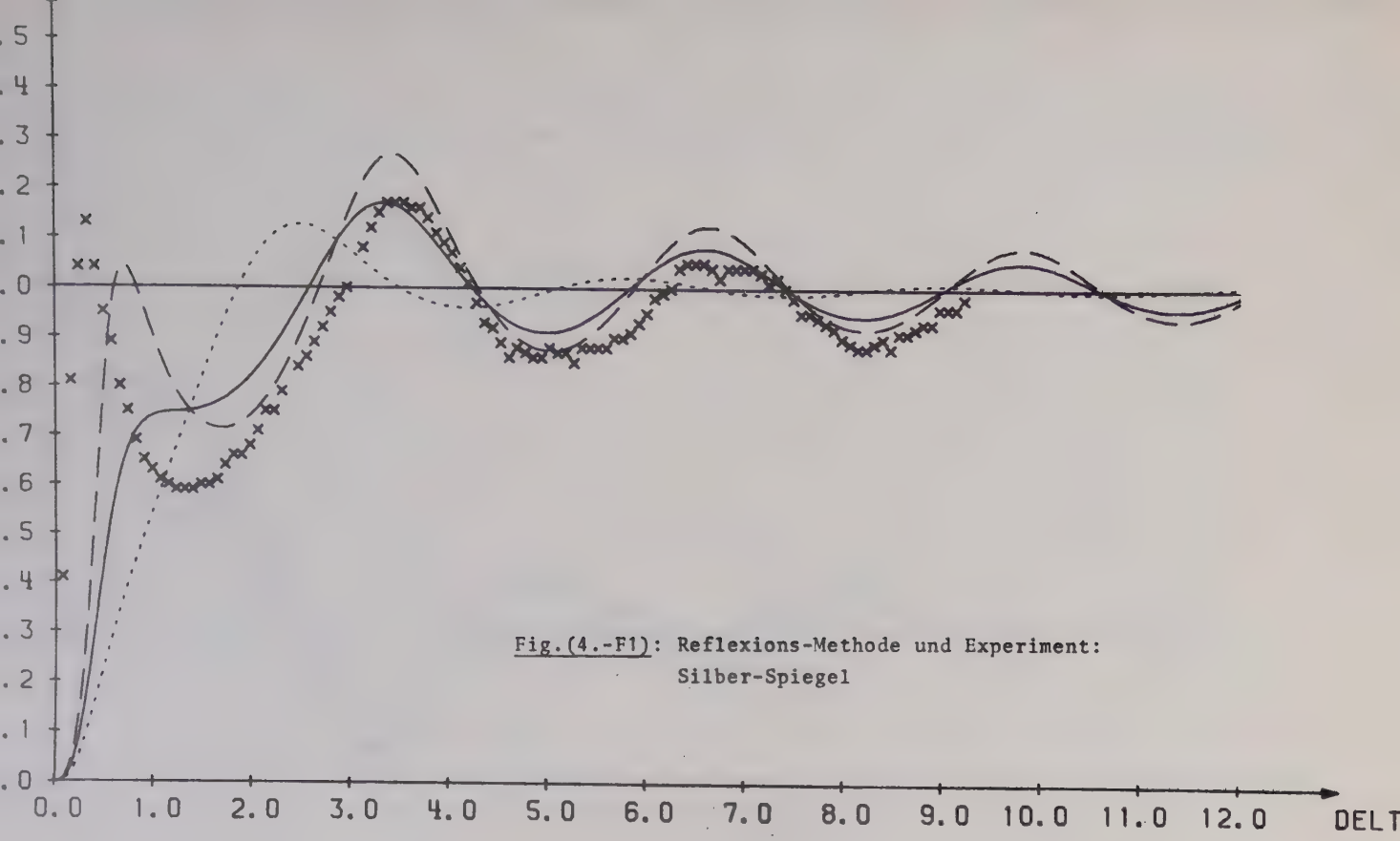


Fig.(4.-F1): Reflexions-Methode und Experiment:
Silber-Spiegel

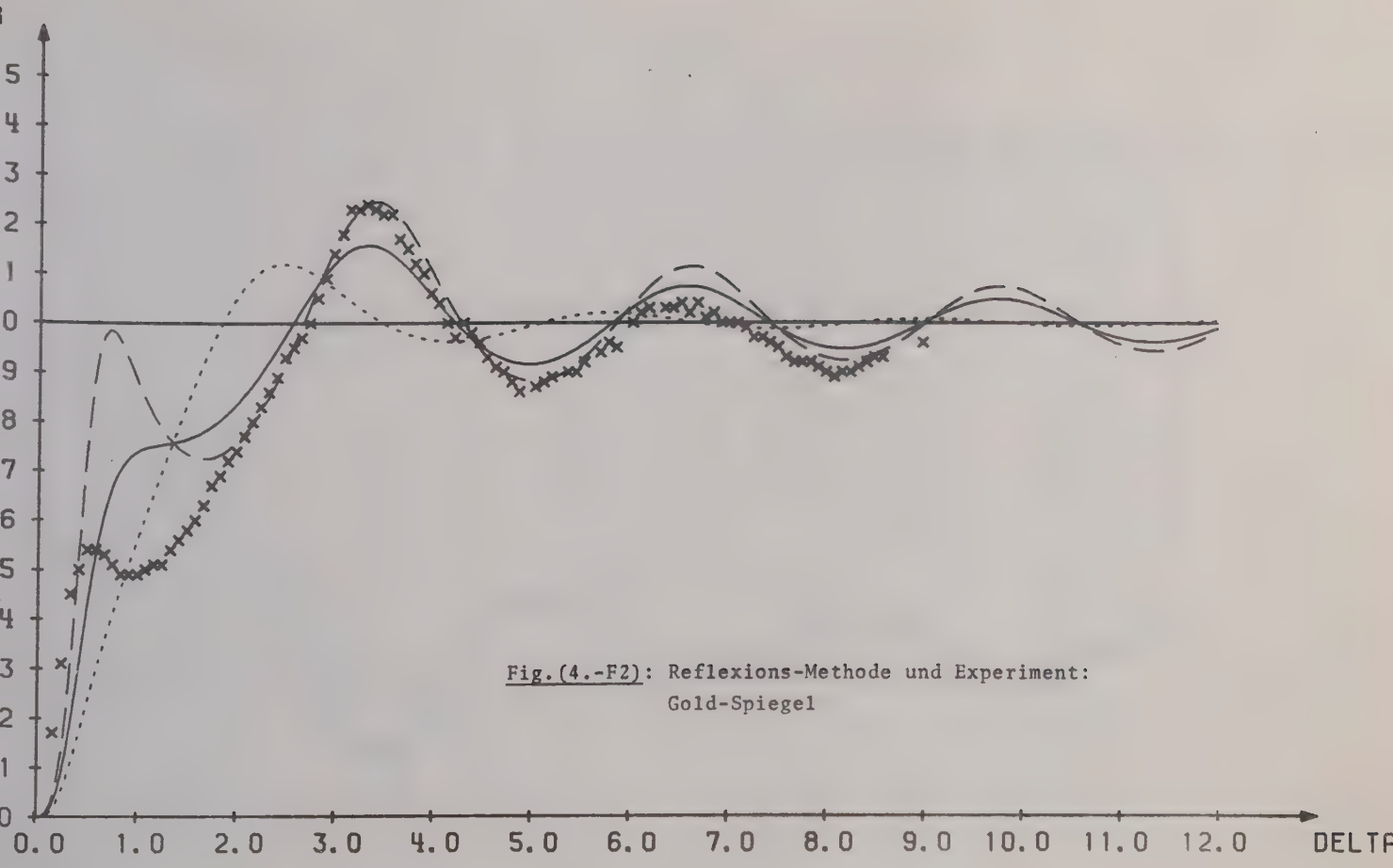


Fig.(4.-F2): Reflexions-Methode und Experiment:
Gold-Spiegel

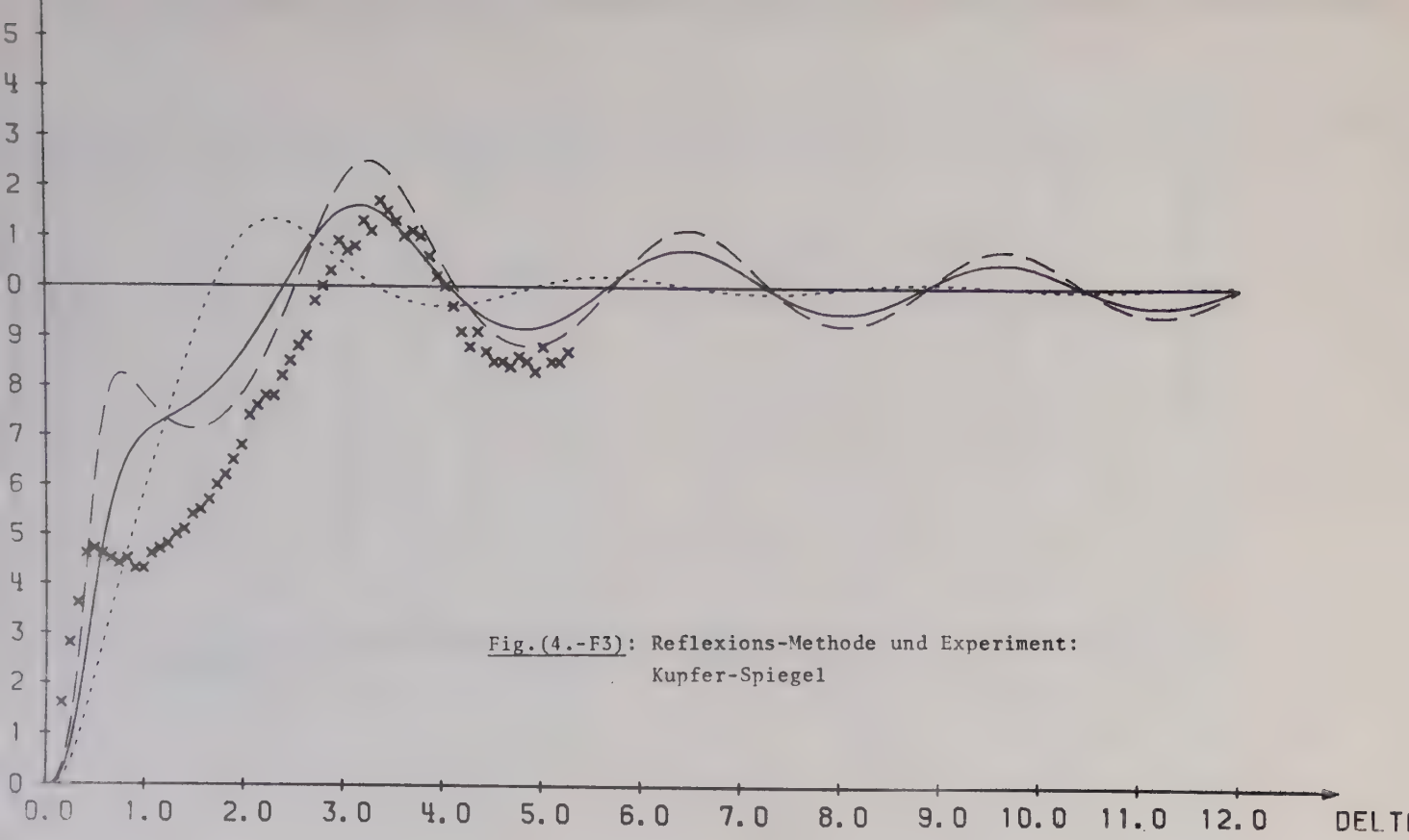


Fig.(4.-F3): Reflexions-Methode und Experiment:
Kupfer-Spiegel

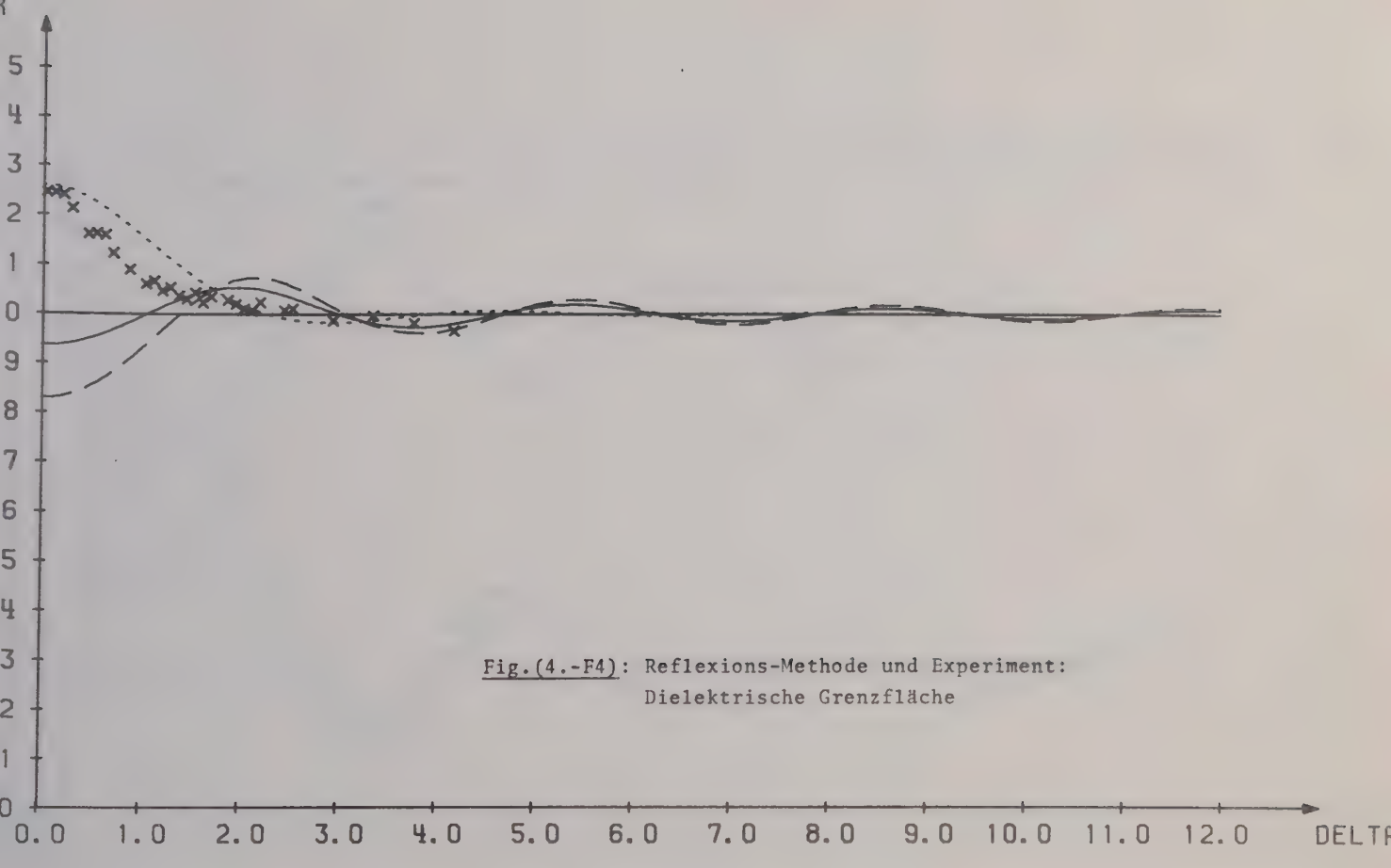


Fig.(4.-F4): Reflexions-Methode und Experiment:
Dielektrische Grenzfläche

5. Die Interferenz-Methode

5.1. Einleitung

In der zweiten Näherungs-Methode [1] wird die Variation der Lebensdauern nach (3.5.-23) über die Energieströme S_o^d, S_o^∞ berechnet.

Das elektrische Feld $\vec{E}_1$ im oberen Halbraum, vgl.Fig. (3.1.-F), läßt sich darstellen als Überlagerung des ursprünglichen Dipolfeldes $\vec{E}$ nach (3.2.-4) und eines reflektierten Feldes $\vec{E}'$. Das Feld im unteren Halbraum sei $\vec{E}_2=\vec{E}''$. Die Energiestromdichte im oberen Halbraum entsteht durch Interferenz von $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ (vgl.5.3.), deshalb bezeichnen wir diese Methode als "Interferenz"-Methode.

In 5.3. wird sich zeigen, daß es zur Bestimmung des Gesamt-Energiestroms S_o^d ausreicht, das elektrische Feld $\vec{E}_1$ im oberen Halbraum zu kennen und daß wir als Integrationsfläche - vgl.(3.3.-4) - eine große Halbkugel um den Dipol wählen können. Das hat folgende Vorteile:

1.) Wir benötigen $\vec{E}$ nur in der Fernfeld-Näherung (3.2.-6).
2.) Wir brauchen nur den Fernfeldanteil von $\vec{E}'$ zu bestimmen.
3.) Wir benötigen $\vec{E}_2$ nicht. Insbesondere brauchen wir Nah- und Mittelfeldanteile von $\vec{E}_2$ nicht, die bei kleinen Abständen d für die Absorption in einem Metallspiegel maßgebend sind.
4.) Wir brauchen die Magnetfelder nicht zu berechnen.

---

[1] Die Interferenz-Methode wurde in /8/ erwähnt und ist in /7/ und /6/,S.101-111 dargestellt.

Zur Bestimmung des reflektierten Feldes $\vec{E}'$ in 5.2. nehmen wir an, daß wir bei der Reflektion nur den Fernfeldanteil von $\vec{E}$ zu berücksichtigen brauchen und als ebene Welle behandeln können. Wegen dieser Annahmen, auf die wir in 5.5. genauer eingehen, ist die Interferenz-Methode im allgemeinen nur eine Näherung.

Die Güte dieser Näherung läßt sich zwar auch mit der Telegraphie-Methode berechnen, vgl.8.2., jedoch nicht so einfach wie bei den andern beiden Näherungs-Methoden qualitativ abschätzen.

5.2. Das reflektierte Feld

Der Fernfeldanteil $\vec{E}_F$ des Dipolfeldes (3.2.-4) ist nach (3.2.-6) transversal. Wir nehmen an, daß wir - auch wenn sich der Dipol in der Nähe der Grenzfläche befindet - nur $\vec{E}_F$ zu berücksichtigen brauchen und bei der Reflektion als ebene Welle behandeln können.

Zur Beschreibung der Reflektion eignet sich ein Polarkoordinaten-System (r,θ,ϕ) um den Dipol besonders gut:

1.) Es gilt $E_r=0$: man multipliziere (3.2.-6) mit $\vec{r}$ skalar.
2.) E_θ ist bei der Reflektion die zur Einfallsebene parallele, E_ϕ die senkrechte Komponente.

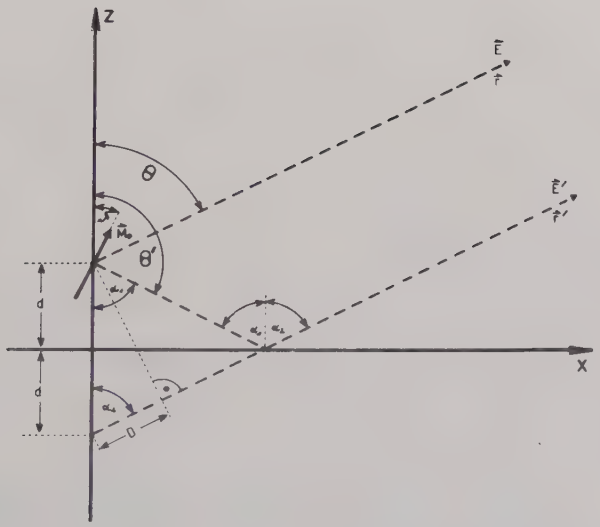


Fig.(5.2.-F): Zur Reflektion des Fernfeldanteils: Nach dem Reflektionsgesetz ist $\alpha_1=\alpha_2$. $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ interferieren auf der weit entfernten Halbkugel nur, wenn $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ parallel sind, wenn also gilt: $\theta=\alpha_2=\alpha_1$.
Dann ist $r'=r+D=r+2\cdot d\cdot\cos\theta$.

Die xy-Ebene sei die Ebene $\phi=0$. Dann sind die Einheitsvektoren des Systems (r,θ,ϕ):

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \vec{e}_x\sin\theta\cos\phi + \vec{e}_y\sin\theta\sin\phi + \vec{e}_z\cos\theta \\
\vec{e}_\theta &= \vec{e}_x\cos\theta\cos\phi + \vec{e}_y\cos\theta\sin\phi - \vec{e}_z\sin\theta \\
\vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x\sin\phi + \vec{e}_y\cos\phi
\end{aligned} \qquad (5.2.-1)$$

$\vec{M}_o^o$ ist im carthesischen System nach (3.1.-F):

$$\vec{M}_o^o = \vec{e}_x\sin\vartheta + \vec{e}_z\cos\vartheta \qquad (5.2.-2)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
M_{or}^o &= \vec{M}_o^o\cdot\vec{e}_r = \sin\vartheta\sin\theta\cos\phi + \cos\vartheta\cos\theta \\
M_{o\theta}^o &= \vec{M}_o^o\cdot\vec{e}_\theta = \sin\vartheta\cos\theta\cos\phi - \cos\vartheta\sin\theta \\
M_{o\phi}^o &= \vec{M}_o^o\cdot\vec{e}_\phi = -\sin\vartheta\sin\phi
\end{aligned} \qquad (5.2.-3)$$

Damit gilt nach (3.2.-6) für das Fernfeld (wir lassen jetzt den Index F fort) :

$$\begin{aligned}
E_r &= 0 \\
E_\theta &= \frac{k^2M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\, e^{i(kr-\omega t)}\,(\sin\vartheta\cos\theta\cos\phi-\cos\vartheta\sin\theta) \\
E_\phi &= \frac{k^2M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\, e^{i(kr-\omega t)}\,(-\sin\vartheta\sin\phi)
\end{aligned} \qquad (5.2.-4)$$

Die unter dem Winkel θ' vom Dipol emittierte Welle - vgl.(5.2.-F) - fällt unter dem Winkel α_1 auf den Spiegel und wird nach den Gesetzen der regulären Reflektion unter dem Winkel $\alpha_2=\alpha_1$ gegen die Spiegelnormale reflektiert.

Auf der sehr weit entfernten Kugel können $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ nur interferieren, wenn $\vec{r}$ parallel $\vec{r}'$ ist, wenn also gilt $\alpha_2=\theta$. Es folgt

$$\theta' = \pi - \alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \pi - \theta \qquad (5.2.-5)$$

Wir beachten, daß $\vec{E}$ und $\vec{E}'$ verschiedene Wege zurückgelegt haben, wenn sie interferieren. Nach (5.2.-F) ist

$$r' = r + D = r + 2 \cdot d \cdot \cos\theta \qquad (5.2.-6)$$

Bei der Reflektion werden $E_{\theta'}$ und $E_{\phi'}$ mit den im allgemeinen komplexen Reflektionskoeffizienten ρ_p, ρ_s multipliziert:

$$\begin{aligned} E'_\theta &= \rho_p E_{\theta'} \\ E'_\phi &= \rho_s E_{\phi'} \end{aligned} \qquad (5.2.-7$$

wobei wir wegen der Annahme, bei der Reflektion $\vec{E}$ als ebene Welle zu betrachten, für ρ_p und ρ_s die Fresnelschen Reflektionskoeffizienten nehmen können.

Damit gilt für das reflektierte Feld

$$E'_r = 0$$

$$E'_\theta = \rho_p \frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r'} e^{i(kr'-\omega t)} (-\sin\vartheta\cos\theta\cos\phi - \cos\vartheta\sin\theta) \qquad (5.2.-8)$$

$$E'_\phi = \rho_s \frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r'} e^{i(kr'-\omega t)} (-\sin\vartheta\sin\phi)$$

Im Nenner kann man r' für große r durch r ersetzen, nicht dagegen in der Exponentialfunktion. Mit der Abkürzung

$$\rho' := \rho\, e^{ikD} = \rho\, e^{2ikd\cos\theta} \qquad (5.2.-9)$$

geht dann (5.2.-8) über in

$$E'_r = 0$$

$$E'_\theta = \rho'_p \frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r} e^{i(kr-\omega t)} (-\sin\vartheta\cos\theta\cos\phi - \cos\vartheta\sin\theta) \qquad (5.2.-10)$$

$$E'_\phi = \rho'_s \frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r} e^{i(kr-\omega t)} (-\sin\vartheta\sin\phi)$$

5.3. Zum Energiestrom

Das elektrische Feld im oberen Halbraum

$$\underline{\vec{E}}^{o} = \underline{\vec{E}}^{1} + \underline{\vec{E}}^{2} = \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{E}}' \qquad (5.3.-1)$$

ist die Überlagerung des ungestörten Dipolfeldes $\underline{\vec{E}}^{1} := \underline{\vec{E}}$ nach (3.2.-4) bzw. (3.2.-6) und des reflektierten Feldes $\underline{\vec{E}}^{2} := \underline{\vec{E}}'$ nach (5.2.-10). Die hochgestellten Indizes bei $\underline{\vec{E}}^{o}$, $\underline{\vec{E}}^{1}$, $\underline{\vec{E}}^{2}$ sowie den Energieströmen werden nur in diesem Abschnitt 5.3. verwendet.

In der Fernfeld-Näherung ist die Energiestromdichte $\underline{\vec{S}}^{o}$ im oberen Halbraum allein aus dem elektrischen Feld bestimmbar, vgl.(3.3.-5):

$$\underline{\vec{S}}^{o} = \vec{r}^{o}\, \varepsilon\, \varepsilon_{o}\, c\, (Re\underline{\vec{E}}^{o})^{2} \qquad (5.3.-2)$$

Mit den Abkürzungen

$$\underline{\vec{S}}^{ij} := \vec{r}^{o}\, \varepsilon\, \varepsilon_{o}\, c\, (Re\underline{\vec{E}}^{i} \cdot Re\underline{\vec{E}}^{j}) \; ; \quad i,j := 1,2 \qquad (5.3.-3)$$

erhalten wir [1]

$$\underline{\vec{S}}^{o} = \underline{\vec{S}}^{11} + \underline{\vec{S}}^{22} + 2\,\underline{\vec{S}}^{12} \qquad (5.3.-4)$$

---

[1] $\underline{\vec{S}}^{o}$ beschreibt die Weitwinkelinterferenz: Mit d als Parameter erhält man als Funktion von θ charakteristische Interferenz-Keulen, die für Untersuchungen des Multipolcharakters sowie der Orientierung des Emitters herangezogen werden können: vgl./9/, sowie /13/,S.216f.

Der in den oberen Halbraum effektiv emittierte Energiestrom ist

$$S^{o} = \int_{HK} \overline{\vec{S}^{o}} \cdot d\vec{f} = S^{11} + S^{22} + 2\,S^{12} \qquad (5.3.-5)$$

mit

$$S^{ij} := \int_{HK} \overline{\vec{S}^{ij}} \cdot d\vec{f} \; ; \qquad i,j := 1,\ 2 \qquad (5.3.-$$

wobei nur über die obere Halbkugel HK integriert wird.

Fehlt der Spiegel, so ist der insgesamt vom Dipol emittierte Energiestrom

$$S^{\infty} = \int_{VK} \overline{\vec{S}^{\infty}} \cdot df \qquad (5.3.-7)$$

wobei die Integration über eine den Dipol umgebende Vollkugel VK läuft. $\vec{S}^{\infty}=\vec{S}^{11}$ ist der Poyntingvektor des ungestörten Dipol. Wegen der Symmetrie des elektrischen Feldes - nach (3.2.-4) bzw.(3.2.-6) ist $\vec{E}(-\vec{r})=\vec{E}(\vec{r})$ - und der doppelten Integrationsfläche für S^{∞} wird

$$S^{\infty} = 2\,S^{11} \qquad (5.3.-8)$$

Bei einem idealen Spiegel würde der gesamte auf den Spiegel fallende - also ursprünglich nach "unten" emittierte - Energiestrom wieder reflektiert und es würde gelten

$$S^{22} = \frac{1}{2} S^{\infty} = S^{11} \qquad (5.3.-9)$$

Die vom Dipol emittierte Gesamtleistung

$$S := S^{o} = S^{11} + S^{22} + 2\,S^{12} = S^{\infty} + 2\,S^{12} \qquad (5.3.-10)$$

würde je nach der Phasenbeziehung zwischen $\vec{E}^1$ und $\vec{E}^2$ (also je nach dem Abstand d des Dipols von der Grenzfläche) um die ungestörte Strahlungsleistung S^{∞} schwanken.

Für reale Spiegel ist

$$S^{22} < \frac{1}{2} S^{\infty} \quad \text{also} \quad S^{22} < S^{11} \qquad (5.3.-11)$$

weil ein Teil

$$S^{u} := S^{11} - S^{22} \qquad (5.3.-12)$$

des auf die Grenzfläche fallenden Stroms die Fläche durchdringt und danach entweder weit in den unteren Halbraum tritt oder absorbiert wird.
Bedeutet S^{o} wieder den in den oberen Halbraum effektiv emittierten Energiestrom, so ist die vom Dipol emittierte Gesamtleistung in dieser Fernfeld-Näherung

$$S = S^{o} + S^{u} = (S^{11}+S^{22}+2S^{12}) + (S^{11}-S^{22})$$
$$= 2\,S^{11} + 2\,S^{12} = S^{\infty} + 2\,S^{12} \qquad (5.3.-13)$$

formal genau wie beim idealen Spiegel. S^{∞} ist durch (3.3.-4) gegeben und für S^{12} folgt aus (5.3.-6), (5.3.-3), (5.3.-1) mit $\vec{E}$ aus (5.2.-4) und $\vec{E}'$ aus (5.2.-10)

$$S^{12} = \varepsilon\,\varepsilon_o\,c \int_{HK} \overline{(Re\vec{E}\cdot Re\vec{E}')}\,\vec{r}^{o}\cdot d\vec{f} \qquad (5.3.-14)$$

5.4. Der Interferenzterm des Energiestroms

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_\theta &:= \sin\vartheta\cos\theta\cos\phi - \cos\vartheta\sin\theta \\ A_\phi &:= -\sin\vartheta\sin\phi \end{aligned} \qquad (5.4.-1)$$

$$\begin{aligned} A'_\theta &:= -\sin\vartheta\cos\theta\cos\phi - \cos\vartheta\sin\theta \\ A'_\phi &:= -\sin\vartheta\sin\phi \end{aligned} \qquad (5.4.-2)$$

erhält man aus (5.2.-4) und (5.2.-10)

$$\vec{E} = \frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r} e^{i(kr-\omega t)} \{ A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi \} \qquad (5.4.-3)$$

$$\vec{E}' = \frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r} e^{i(kr-\omega t)} \{ \rho'_p A'_\theta \vec{e}_\theta + \rho'_s A'_\phi \vec{e}_\phi \} \qquad (5.4.-4)$$

und damit

$$\overline{Re\vec{E}\cdot Re\vec{E}'} = \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\right)^2 \{ A_\theta A'_\theta R_p \cos\delta'_p + A_\phi A'_\phi R_s \cos\delta'_s \} \qquad (5.4.-5)$$

wobei wir analog (4.1.-2), (5.2.-9) schreiben

$$\begin{aligned} R_i &:= |\rho'_i| = |\rho_i| ; \qquad i:=s,p \\ \delta'_i &:= arg(\rho'_i) = \delta_i + 2kd\cos\theta ; \qquad i:=s,p \end{aligned} \qquad (5.4.-6)$$

Aus (5.3.-14) und (3.3.-4) folgt

$$I^{12} := 2\,S^{12} / S^{\infty}$$

$$= 2\,\varepsilon\,\varepsilon_o\,c\,\frac{1}{2}\,\left(\frac{k^2 M_o}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_{HK} \vec{r}^{\,o} \cdot d\vec{f}\; \{A_\theta A'_\theta R_p \cos\delta'_p + A_\phi A'_\phi R_s \cos\delta'_s\} \cdot$$

$$\cdot \frac{3 \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_o}{k^3 \omega M_o^2}$$

$$= \frac{3}{4\pi r^2} \int_{HK} \vec{r}^{\,o} \cdot d\vec{f}\; \{A_\theta A'_\theta R_p \cos\delta'_p + A_\phi A'_\phi R_s \cos\delta'_s\} \qquad (5.4.-7)$$

Nun ist

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{HK} \vec{r}^{\,o} \cdot d\vec{f}\; A_\theta\, A'_\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \{-\sin^2\vartheta\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\vartheta\sin^2\theta\}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 d\cos\theta\; \{-\sin^2\vartheta\cos^2\theta + 2\cos^2\vartheta\sin^2\theta\} \qquad (5.4.-8)$$

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{HK} \vec{r}^{\,o} \cdot d\vec{f}\; A_\phi\, A'_\phi = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2\vartheta \sin^2\phi$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 d\cos\theta\; \sin^2\vartheta \qquad (5.4.-9)$$

Da R_s, R_p, δ'_s, δ'_p nicht von ϕ abhängen, folgt

$$I^{12} = \frac{3}{4} \int_0^1 d\cos\theta\; \{ R_p \cos\delta'_p (-\sin^2\vartheta\cos^2\theta + 2\cos^2\vartheta\sin^2\theta) +$$

$$+ R_s \cos\delta'_s\, \sin^2\vartheta \;\} \qquad (5.4.-10)$$

Setzen wir noch

$$\gamma := \cos\vartheta$$
$$\Delta := 2\,k\,d \qquad (5.$$

und

$$I_{\downarrow}^{12} := \frac{3}{4}\int_0^1 d\gamma\ \{R_s\cos(\delta_s+\Delta\gamma) - \gamma^2 R_p\cos(\delta_p+\Delta\gamma)\} \qquad (5.4.\text{-}12)$$

$$I_{\uparrow}^{12} := \frac{3}{2}\int_0^1 d\gamma\ (1-\gamma^2)\ R_p\cos(\delta_p+\Delta\gamma) \qquad (5.4.\text{-}13)$$

so wird

$$I^{12} = I_{\downarrow}^{12}\sin^2\vartheta + I_{\uparrow}^{12}\cos^2\vartheta \qquad (5.4.\text{-}14)$$

Mit (3.5.-23), (5.3.-13) und (5.4.-7) erhält man die Variation der Lebensdauern nach der Interferenz-Methode

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + q_\infty\left(\frac{S_o^d}{S_o^\infty} - 1\right) = 1 + q_\infty\ 2\ S_o^{12} / S_o^\infty$$
$$= 1 + q_\infty\ I^{12}$$
$$= 1 + q_\infty\ (\ I_{\downarrow}^{12}\sin^2\vartheta + I_{\uparrow}^{12}\cos^2\vartheta\ ) \qquad (5.4.\text{-}15)$$

Insbesondere ist also für den zur Grenzfläche parallelen Dipol ($\vartheta := \pi/2$)

$$\frac{\tau_{\infty}}{\tau_{d}^{\rightarrow}} = 1 + q_{\infty} I_{\rightarrow}^{12} \qquad (5.4.-16)$$

für den senkrechten Dipol ($\vartheta := 0$)

$$\frac{\tau_{\infty}}{\tau_{d}^{\uparrow}} = 1 + q_{\infty} I_{\uparrow}^{12} \qquad (5.4.-17)$$

und für isotrope Verteilung nach (A7-23)

$$\frac{\tau_{\infty}}{\tau_{d}^{i}{}_{S}} = 1 + q_{\infty} \left(\frac{2}{3} I_{\rightarrow}^{12} + \frac{1}{3} I_{\uparrow}^{12} \right) \qquad (5.4.-18)$$

$I_{\rightarrow}^{12}$ und $I_{\uparrow}^{12}$ sind dabei durch (5.4.-12)f gegeben und wurden numerisch berechnet.

Die Ergebnisse (5.4.-16)f mit (5.4.-12)f für die Hauptlagen stimmen mit den von Drexhage in /7/,Gl.(2), Gl.(3) angegebenen überein, wenn man die Änderung der Nomenklatur beachtet:

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} &:= -\delta_{S} \\ \delta_{\parallel} &:= -\delta_{p} + \pi \\ \rho_{\perp} &:= R_{S} \\ \rho_{\parallel} &:= R_{p} \end{aligned} \qquad (5.4.-19)$$

5.5. Kurze Diskussion

Für große Entfernungen vom Dipol reduziert sich das elektrische Feld (3.2.-4) des Dipols auf den Fernfeldanteil $\vec{E}_F$ nach (3.2.-6). Wir nahmen in 5.2. an, daß wir bei der Reflektion nur $\vec{E}_F$ zu berücksichtigen brauchen. Wir behandelten also $\vec{E}_F$ als konsistentes, d.h. den Maxwellschen Gleichungen genügendes Feld. Das ist aber nicht richtig. So ist das elektrische Fernfeld weder divergenzfrei noch erfüllt es die Wellengleichung. Außerdem ist zwar das Magnetfeld des elektrischen Fernfeldes gleich dem magnetischen Fernfeld

$$\text{rot } \vec{E}_F = i\omega\mu\mu_0 \vec{H}_F \qquad (5.5.-1)$$

dagegen ist das elektrische Feld des magnetischen Fernfeldes nicht gleich dem elektrischen Fernfeld

$$\text{rot } \vec{H}_F = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_F + \Phi(1/r^2) \qquad (5.5.-2)$$

mit $\Phi \neq 0$. Die Interferenz-Methode wird also im allgemeinen nur eine Näherung sein.

Ein tieferes Verständnis der in 5.2. effektiv vorgenommenen Ersetzung der Dipolwelle (3.2.-4) durch ein Bündel ebener Wellen liefert die Telegraphie-Methode: Das elektrische Feld des Dipols läßt sich zwar nach ebenen Wellen entwickeln, das in der Interferenz-Methode zur Berechnung der Lebensdauern herangezogene Bündel ist jedoch im allgemeinen unvollständig: vgl.8.2.

Der Rechenaufwand ist bei der Interferenz-Methode erheblich größer als bei der Reflektions-Methode, dafür treten keine Interpretations-Schwierigkeiten auf.

Ein großer Vorteil der Interferenz-Methode ist, daß sie als einzige der in der vorliegenden Arbeit dargestellten Methoden zwanglos Ergebnisse für das scheinbar ganz andere Problem der Weitwinkelinterferenz liefert, vgl.5.3. Anm.1; als nachteilig empfinden wir, daß sich die Güte dieser Methode im allgemeinen nicht auf einfache Weise qualitativ angeben läßt.

Zur Überraschung stellt sich beim Vergleich in 8.2. mit der Telegraphie-Methode heraus, daß die Interferenz-Methode für die Reflektion am rein dielektrischen, optisch dünneren Medium

$$n := n_2 / n_1 < 1 ; \qquad n \text{ reell} \tag{5.5.-3}$$

exakt richtige Ergebnisse liefert.

5.6. Vergleich mit dem Experiment

Die Ergebnisse (5.4.-16)ff mit (5.4.-12)f der Interferenz-Methode sind in (5.-F) für die vier verschiedenen Spiegel dargestellt. Zu den Bezeichnungen und Daten vergleiche man 3.8.

Bei den Metallspiegeln stimmen die theoretischen Kurven für parallele Dipolstellung und isotrope Verteilung in größeren Abständen $\delta > 3.5$ mit den Messungen gut überein, die Kurven für parallele Dipolstellung noch bis etwa $\delta > 2$. Die senkrechte Dipolstellung (vgl.10.6.) kann ausgeschlossen werden.

Die Messungen an der dielektrischen Grenzfläche stimmen sehr gut mit den Ergebnissen der Interferenz-Methode für isotrope Verteilung überein. Sowohl für senkrechte wie für parallele Dipolstellung erhält man von den Experimenten deutlich abweichenden theoretische Kurven.

Auf eine Interpretation der Vergleiche von Theorie und Experiment gehen wir in 10.6. ein.

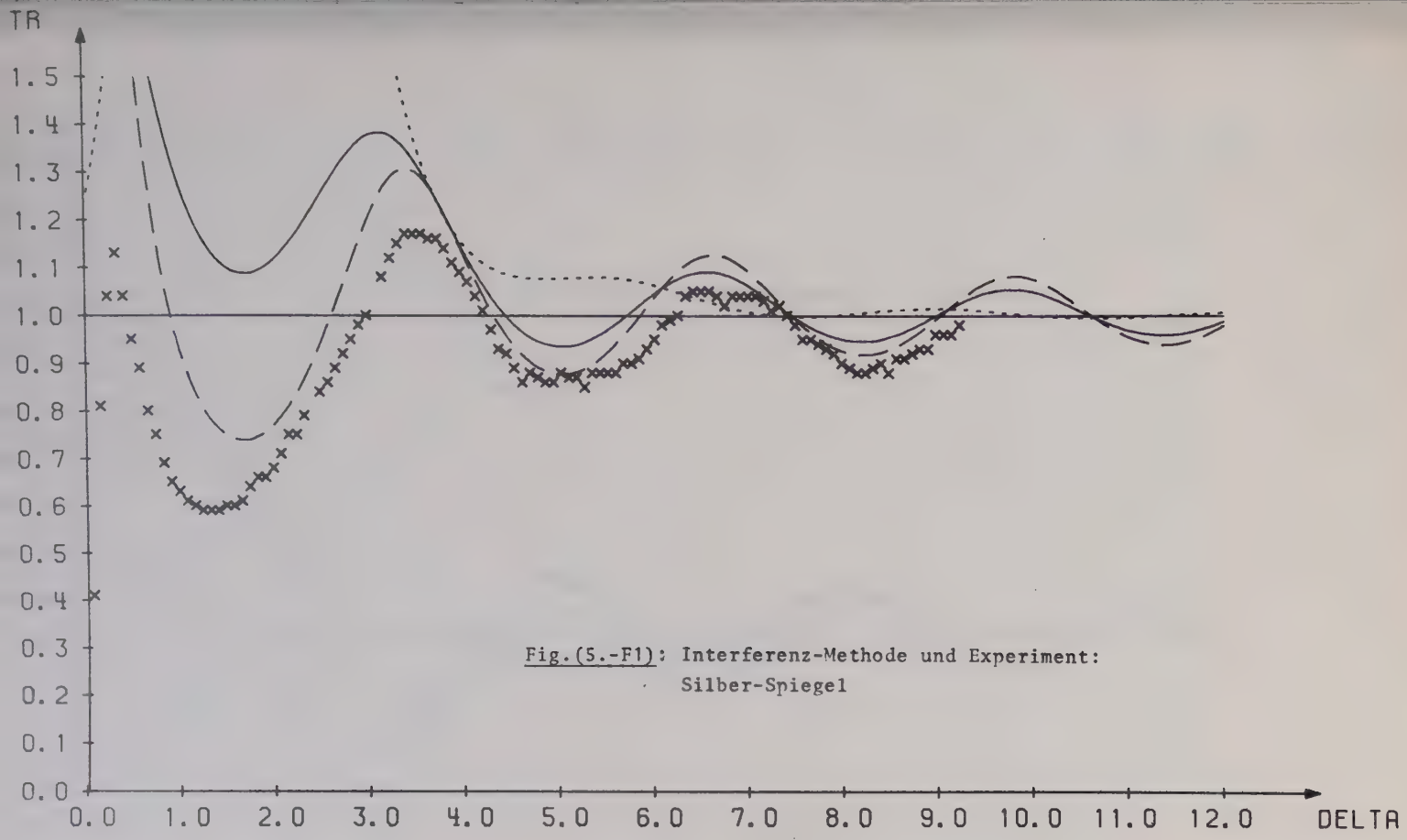


Fig.(5.-F1): Interferenz-Methode und Experiment:
Silber-Spiegel

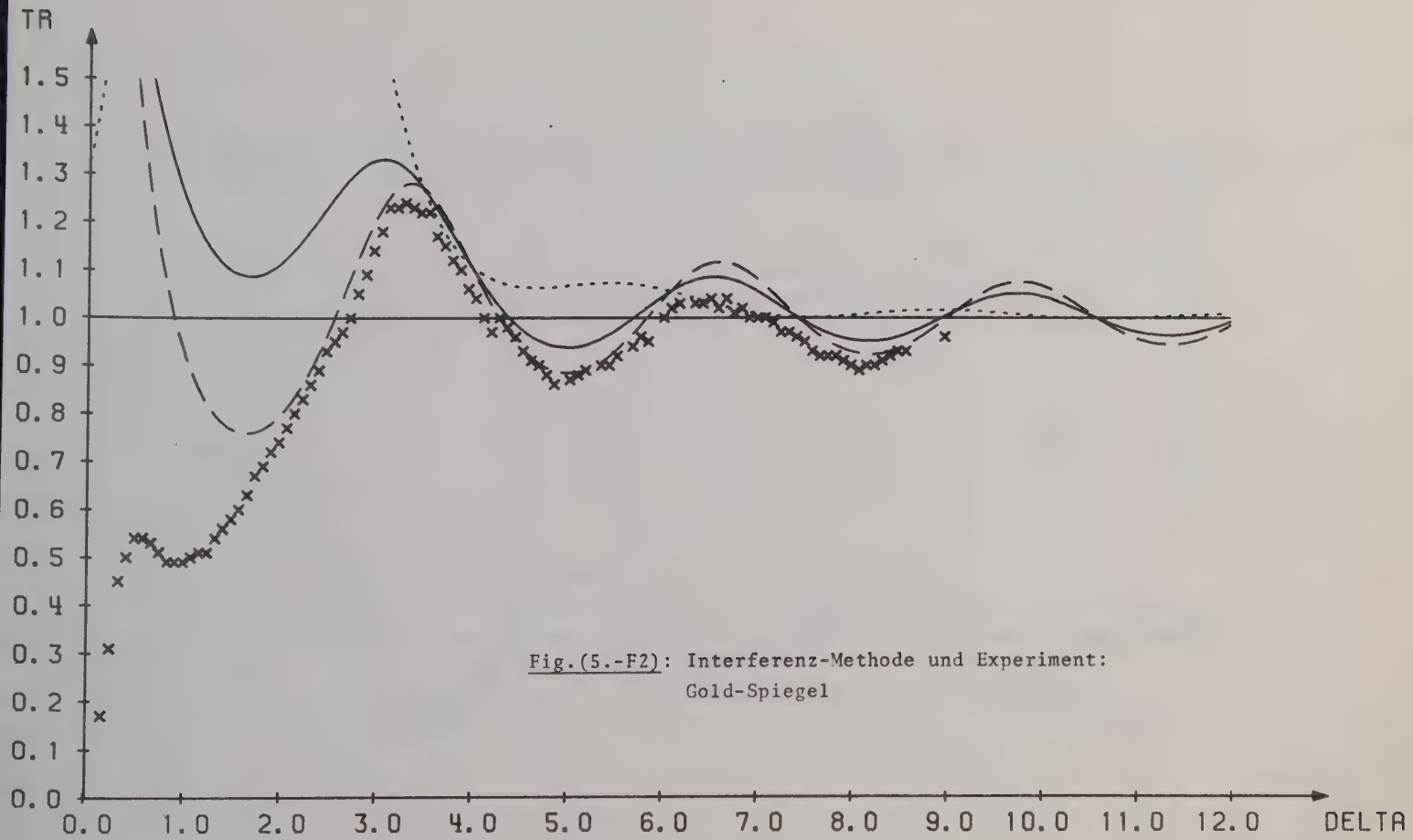


Fig.(5.-F2): Interferenz-Methode und Experiment:
Gold-Spiegel

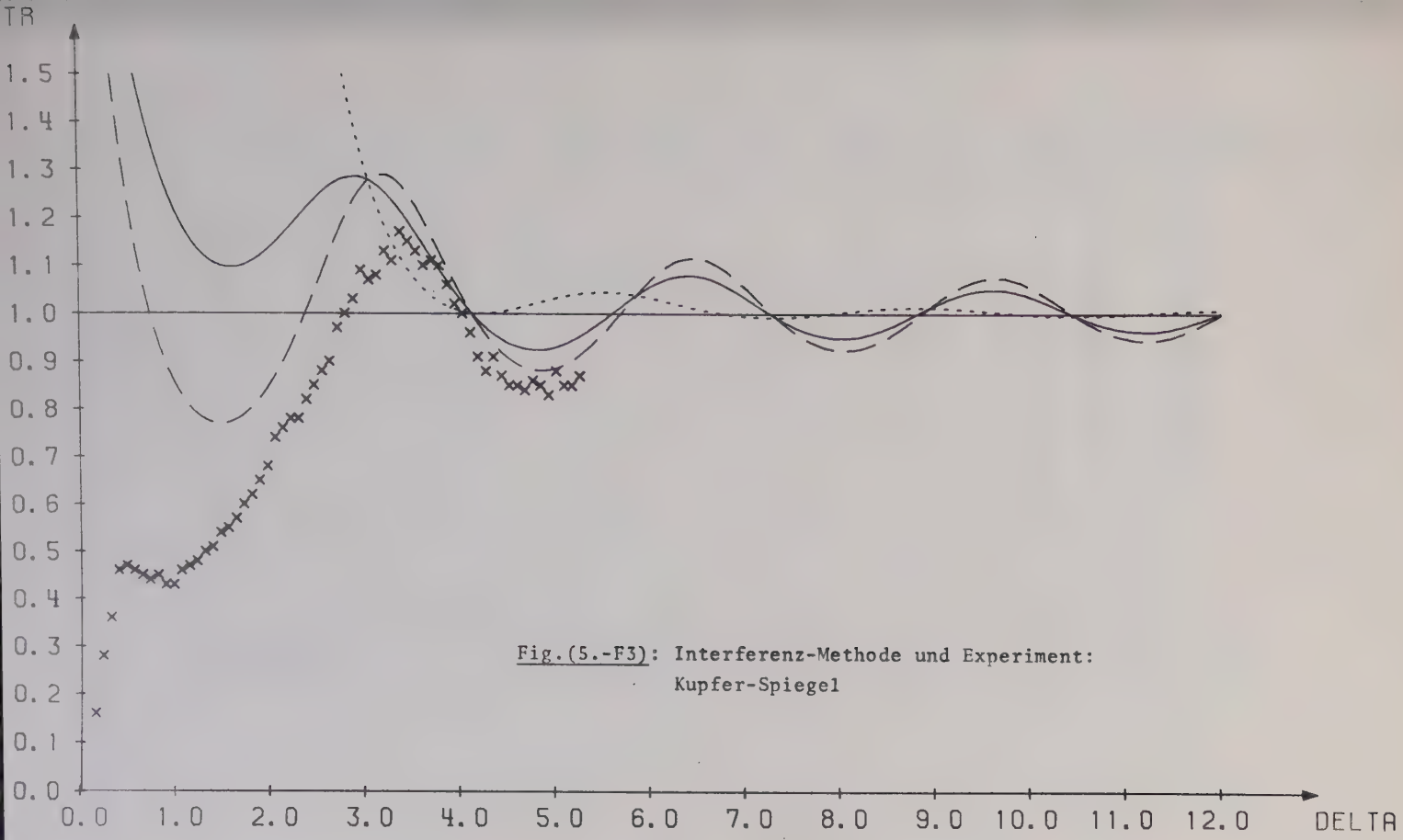


Fig.(5.-F3): Interferenz-Methode und Experiment:
Kupfer-Spiegel

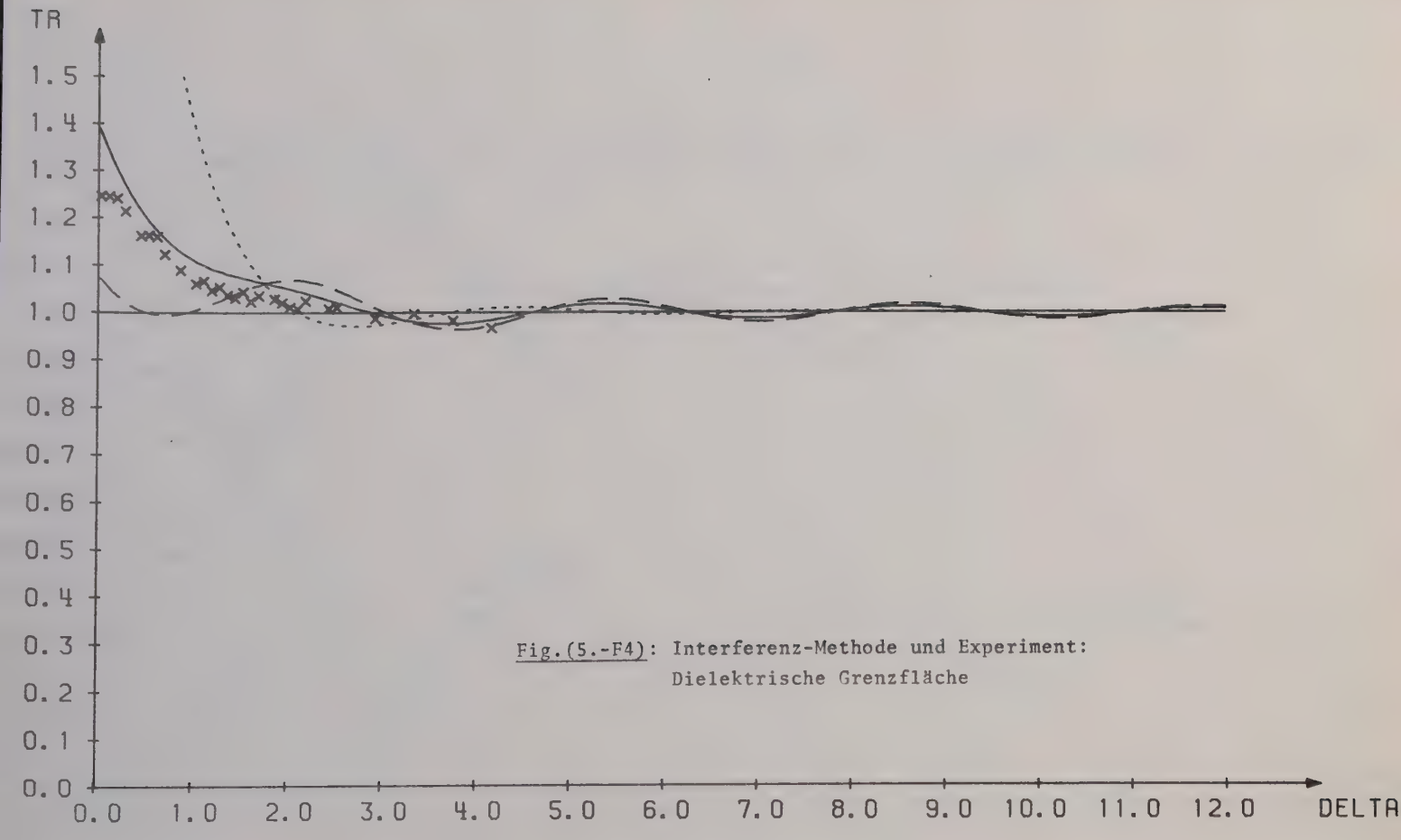


Fig.(5.-F4): Interferenz-Methode und Experiment:
Dielektrische Grenzfläche

6. Die Polarisations-Methode

6.1. Einleitung und Überblick

Die dritte Näherungs-Methode[1] berechnet die Variation der Lebensdauern nach der molekularen Optik.

Ist der untere Halbraum H2 von Fig.(3.1.-F) polarisierbar, so wird in jedem Volumenelement $d\tau$ von H2 durch das Feld $\vec{E}$ nach (3.2.-4) der zeitlich veränderliche Dipol

$$d\vec{M}' = \alpha \cdot \vec{E} \cdot d\tau \qquad (6.1.-1)$$

induziert, wobei α [2] die spezifische Polarisierbarkeit in H2 ist. Jeder dieser induzierten Dipole erzeugt ein elektrisches Feld $d\vec{E}'$ gemäß (3.2.-4), insbesondere am Ort des ursprünglichen Dipols das Feld $d\vec{E}_0'$. Summiert man die Beiträge aller Volumenelemente von H2 (Integration von $d\vec{E}_0'$ über H2), so erhält man das reflektierte Eigenfeld (vgl.3.6.), und mit den Gleichungen (3.6.-14)f ergibt sich sofort die Variation der Lebensdauern in der Näherung dieser "Polarisations-Methode".

Es ist leicht zu sehen, weshalb die Polarisations-Methode nur eine Näherung ist: Das Volumenelement $d\tau$ von H2 "sieht" nicht nur das Feld $\vec{E}$ des ursprünglichen Dipols, sondern auch die Felder der induzierten Dipole seiner Umgebung. Außerdem wird eine Linearität zwischen $d\vec{M}'$ und $\vec{E}$ nur für kleine Felder gelten.

---

[1] Die Ergebnisse dieser Methode wurden in /24/ veröffentlicht.

[2] Man beachte, daß α komplex sein kann: vgl.6.4.

Man könnte nun versuchen, in einem Iterationsverfahren -dessen O.Näherung dann die Polarisations-Methode ist- das Erregerfeld in $d\tau$ sukzessiv zu verbessern. Ein solches Verfahren führt aber schon im ersten Schritt zu erheblichen Schwierigkeiten.

Man könnte auch versuchen, eine exakte Lösung zu finden. Das exakte elektrische Feld in H2 sei $\vec{E}_2$. Summiert man alle Felder der von $\vec{E}_2$ in H2 induzierten Dipole und addiert das ursprüngliche Feld $\vec{E}$, so muß sich in H2 wieder $\vec{E}_2$ ergeben. Man erhält so für $\vec{E}_2$ eine Integralgleichung, auf die wir hier jedoch nicht weiter eingehen wollen, da in 7. in der "Telegraphie-Methode" eine einfachere exakte Methode zur Variation der Lebensdauern sowie zur Bestimmung von $\vec{E}_2$ dargestellt wird.

Die Polarisations-Methode hat gegenüber den beiden anderen Näherungs-Methoden die Vorteile, klar die Vernachlässigungen zu zeigen und Wege zu ihrer Verbesserung nahezulegen. Außerdem erkennt man sofort ihre Grenzen: Sie wird eine umso bessere Näherung sein, je weniger sich $\vec{E}_2$ von $\vec{E}$ unterscheidet, je kleiner also der Betrag der Polarisierbarkeit α ist. In der Tat wird sich die Polarisations-Methode als erste Näherung für kleine $|\alpha|$ herausstellen: vgl.8.3. Sie wird also für Metallspiegel keine gute Näherung sein.

6.2. Die allgemeine Lösung

Mit der Abkürzung [1]

$$\rho := k \cdot r \tag{6.2.-1}$$

ist das elektrische Feld (3.2.-4) des Dipols (3.2.-1)

$$\vec{E} = \frac{k^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\rho^3} \cdot e^{i(\rho-\omega t)} \cdot \{\vec{M}_0(\rho^2+i\rho-1)+\vec{r}^0(\vec{r}^0\cdot\vec{M}_0)\cdot(3-3i\rho-\rho^2)\} \tag{6.2.-2}$$

Der gemäß (6.1.-1) in H2 induzierte Dipol $d\vec{M}'$ erzeugt das Feld

$$d\vec{E}' = \frac{k^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\rho'^3} \cdot e^{i\rho'} \cdot \{d\vec{M}'(\rho'^2+i\rho'-1)+\vec{r}^{0\prime}(\vec{r}^{0\prime}\cdot d\vec{M}')\cdot (3-3i\rho'-\rho'^2)\} \tag{6.2.-3}$$

Dabei ist ρ' der Abstand, $\vec{r}^{0\prime}$ die Richtung von $d\tau$ zum Aufpunkt. Am Ort des ursprünglichen Dipols ist $\rho'=\rho$ und $\vec{r}^{0\prime}=-\vec{r}^0$. Mit (6.2.-2) folgt

$$\begin{aligned} d\vec{E}_\delta &= \frac{k^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\rho^3} \cdot e^{i\rho}\{d\vec{M}'(\rho^2+i\rho-1)+\vec{r}^0(\vec{r}^0\cdot d\vec{M}')\cdot(3-3i\rho-\rho^2)\} \\ &= \alpha d\tau\left(\frac{k^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\rho^3}\right)^2 \cdot e^{i(2\rho-\omega t)}\{\vec{M}_0(\rho^2+i\rho-1)^2 + \\ &\quad + \vec{r}^0(\vec{r}^0\cdot\vec{M}_0)\left[2(\rho^2+i\rho-1)+(3-3i\rho-\rho^2)\right](3-3i\rho-\rho^2)\} \\ &= \alpha d\tau\left(\frac{k^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\rho^3}\right)^2 \cdot e^{i(2\rho-\omega t)}\cdot\{\vec{M}_0(\rho^2+i\rho-1)^2 + \\ &\quad + \vec{r}^0(\vec{r}^0\cdot\vec{M}_0)(3-6i\rho-\rho^2-2i\rho^3-\rho^4)\} \end{aligned} \tag{6.2.-4}$$

---

[1] Da bei der Polarisations-Methode keine Reflexionskoeffizienten auftreten, sollte eine Verwechslung der hier benutzten Größen ρ,δ mit den Reflexions-Parametern nicht zu befürchten sein.

$d\vec{E}_o'$ ist der Beitrag von $d\tau$ zum reflektierten Eigenfeld (vgl.3.6.). Das vollständige reflektierte Eigenfeld erhält man durch Addition aller Beiträge, also durch Integration über H2. Nach (3.6.-14) wird

$$F = \int d\tau \cdot \alpha \cdot \frac{k^3}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\rho^6} e^{2i\rho} \cdot \{(\rho^2+i\rho-1) + \cos^2\psi \cdot (3-6i\rho-\rho^2-2i\rho^3-\rho^4)\} \qquad (6.2.-5)$$

Dabei ist ψ der Winkel zwischen $\vec{r}^o$ und $\vec{M}_o$

$$\cos\psi := (\vec{r}^o \cdot \vec{M}_8) \qquad (6.2.-6)$$

Aus (3.6.-15) ergibt sich für die Lebensdauer

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + \frac{3}{2} \cdot q_\infty \cdot \mathrm{Im}(F) \qquad (6.2.-7)$$

Das Integral von (6.2.-5) wird in 6.3. analytisch berechnet.

Wir haben in den Gleichungen dieses Abschnitts die relative Dielektrizitätskonstante ε_1 mitgenommen, sehen also vor, daß der ursprüngliche Dipol sich nicht im Vakuum befindet, sondern in einem "Grundmedium", das zunächst als unpolarisierbar betrachtet wird.

6.3. Analytische Integration

Nach 3.1. sollen die Halbräume H1 und H2 homogen und isotrop sein. Dann kann die spezifische Polarisierbarkeit α vor das Integral in (6.2.-5) gezogen werden und man erhält

$$F = \frac{\alpha}{4\varepsilon_1\varepsilon_0}\cdot h \qquad (6.3.-1)$$

$$h := \frac{k^3}{\pi}\int d\tau \frac{1}{\rho^6} e^{2i\rho}\{(\rho^2+i\rho-1)^2+\cos^2\psi(3-6i\rho-\rho^2-2i\rho^3-\rho^4)\} \qquad (6.3.-2)$$

wobei sich die Integration über H2 erstreckt. Man wählt zweckmäßigerweise eins der in (6.3.-F) angedeuteten Koordinaten-Systeme.

Zunächst nutzt man die Symmetrie von H2 um die z-Achse aus und integriert über den Azimutalwinkel ϕ des Polar-Koordinaten-System (r,θ,ϕ), wobei sich der Term mit $\cos^2\psi$ vereinfacht. Dann ist noch über eine Viertelebene E4, etwa rechts unten in (6.3.-F) zu integrieren. Wegen der Form des Integranden von (6.3.-2) erscheinen (r,θ) und (x,y) als Integrationsvariable sinnvoll. Bei der Integration über die Polarwinkel treten jedoch nichtkonvergente Integrale auf (z.B. haben alle Volumenelemente mit r=const. die gleiche Phase!), deren Konvergenz nicht ohne Künstlichkeit erzwungen werden kann. Wir führen daher im folgenden die Integration über die carthesischen Koordinaten (x,y) aus, wobei wir in den Funktionen $g(\zeta)$ -vgl.(6.3.-6)ff- noch interessante Zwischenergebnisse erhalten: vgl.(6.3.-21).

Nach (6.3.-F) ist

$$\begin{aligned}\cos^2\psi &:= (\vec{r}_o\cdot\vec{M}_o^o)^2 = (\tfrac{x}{r}\sin\vartheta+\tfrac{z}{r}\cos\vartheta)^2\\ &= (\sin\vartheta\sin\theta\cos\phi+\cos\vartheta\cos\theta)^2\\ &= \sin^2\vartheta\sin^2\theta\cos^2\phi+\cos^2\vartheta\cos^2\theta+\\ &\qquad +2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\theta\cos\theta\cos\phi \qquad (6.3.-3)\end{aligned}$$

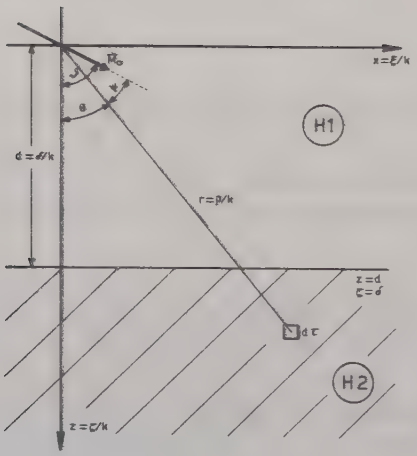


Fig.(6.3.-F): Koordinatensysteme zur Integration über H2.
Im Gegensatz zu (3.1.-F) liegt hier der Dipol im Ursprung und die z-Achse zeigt nach unten. Φ ist der Azimutalwinkel in (r,θ,Φ). Die y-Achse zeigt nach vorne.

Damit wird

$$\frac{k^3}{\pi}\cdot\int_{H2} d\tau\{A(\rho)+\cos^2\phi B(\rho)\}$$

$$= \frac{k^3}{\pi}\cdot\int_{H2} r^2 dr d\cos\theta d\Phi\{A(\rho)+\cos^2\phi B(\rho)\}$$

$$= k^3\cdot\int_{E4} r^2 dr d\cos\theta\{2A(\rho)+(\sin^2\vartheta\sin^2\theta+2\cos^2\vartheta\cos^2\theta)B(\rho)\}$$

$$= k^3\cdot\int_d dz\int_0^\infty dx\cdot x\cdot\{2A(\rho)+(\frac{x^2}{r^2}\sin^2\vartheta+2\frac{z^2}{r^2}\cos^2\vartheta)B(\rho)\} \qquad (6.3.-4)$$

Berücksichtigt man $x^2/r^2=1-z^2/r^2$ sowie $xdx=rdr$ für $z=$const. und führt nach (6.3.-F) -vgl.auch (6.2.-1)- die dimensionslosen Größen

$$\rho := kr; \quad \zeta := kz; \quad \delta := kd \qquad (6.3.-5)$$

ein, so geht (6.3.-2) mit (6.3.-4) über in

$$h = h(\delta) = \int_\delta^\infty d\zeta\, g(\zeta) \qquad (6.3.-6)$$

$$g(\zeta) := g_o(\zeta) + g_s(\zeta)\cdot\sin^2\vartheta + g_c(\zeta)\cdot\cos^2\vartheta \qquad (6.3.-7)$$

$$g_o(\zeta) := 2\int_\zeta^\infty \frac{d\rho}{\rho^3} e^{2i\rho}(\rho^2+i\rho-1)^2 \qquad (6.3.-8)$$

$$g_s(\zeta) := \int_\zeta^\infty \frac{d\rho}{\rho^3} e^{2i\rho}(1-\frac{\zeta^2}{\rho^2})\cdot(3-6i\rho-\rho^2-2i\rho^3-\rho^4) \qquad (6.3.-9)$$

$$g_c(\zeta) := 2\int_\zeta^\infty \frac{d\rho}{\rho^3} e^{2i\rho}\cdot\frac{\zeta^2}{\rho^2}(3-6i\rho-\rho^2-2i\rho^3-\rho^4) \qquad (6.3.-10)$$

Mit Hilfe der Funktionen I_n aus Tabelle (6.7.-T) erhält man nach kleiner Zwischenrechnung

$$g_o(\zeta) = 2I_1(\zeta) + e^{2i\zeta}\{\frac{1}{2\zeta^4} - \frac{i}{\zeta^3} - \frac{2}{\zeta^2}\} \qquad (6.3.-11)$$

$$g_s(\zeta) = -I_1(\zeta) + e^{2i\zeta}\{\frac{1}{4\zeta^4} - \frac{i}{2\zeta^3} + \frac{3}{4\zeta^2} + \frac{i}{2\zeta}\} \qquad (6.3.-12)$$

$$g_c(\zeta) = e^{2i\zeta}\{\frac{1}{\zeta^4} - \frac{2i}{\zeta^3} + \frac{1}{2\zeta^2} - \frac{i}{\zeta}\} \qquad (6.3.-13)$$

Setzen wir noch

$$g_{\rightarrow}(\zeta) := g_o(\zeta) + g_s(\zeta)$$
$$= I_1(\zeta) + e^{2i\zeta}\cdot\{\frac{3}{4\zeta^4} - \frac{3i}{2\zeta^3} - \frac{5}{4\zeta^2} + \frac{i}{2\zeta}\} \qquad (6.3.-14)$$

$$g_{\uparrow}(\zeta) := g_o(\zeta) + g_c(\zeta)$$
$$= 2I_1(\zeta) + e^{2i\zeta}\cdot\{\frac{3}{2\zeta^4} - \frac{3i}{\zeta^3} - \frac{3}{2\zeta^2} - \frac{i}{\zeta}\} \qquad (6.3.-15)$$

so wird

$$g(\zeta) = g_{\rightarrow}(\zeta)\cdot\sin^2\vartheta + g_{\uparrow}(\zeta)\cdot\cos^2\vartheta \qquad (6.3.-16)$$

Die Funktionen $h(\delta)$ können nach (6.3.-6) aus (6.3.-14)ff mit (6.7.-T) und (6.7.-10) ebenfalls leicht berechnet werden:

$$h_{\rightarrow}(\delta) := \int_{\delta}^{\infty} d\zeta\ g_{\rightarrow}(\zeta)$$
$$= -\delta I_1(\delta) + e^{2i\delta}\cdot\{\frac{1}{4\delta^3} - \frac{i}{2\delta^2} - \frac{1}{4\delta} + \frac{i}{2}\} \qquad (6.3.-17)$$

$$h_{\uparrow}(\delta) := \int_{\delta}^{\infty} d\zeta\ g_{\uparrow}(\zeta)$$
$$= -2\delta I_1(\delta) + e^{2i\delta}\cdot\{\frac{1}{2\delta^3} - \frac{i}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta} + i\} \qquad (6.3.-18)$$

$$h(\delta) = h_{\rightarrow}(\delta)\cdot\sin^2\vartheta + h_{\uparrow}(\delta)\cdot\cos^2\vartheta \qquad (6.3.-19)$$

Mit (6.3.-1) und (6.2.-7) erhält man für die Lebensdauer

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau_d} = 1 + \frac{3}{2}\, q_\infty\, \mathrm{Im}\left(\frac{\alpha}{4\varepsilon_1\varepsilon_o}\, h(\delta)\right) \qquad (6.3.-20)$$

Die Funktionen $g(\zeta)$ stellen offenbar den Beitrag einer dünnen Schicht von H2 dar: Befindet sich im Abstand ζ vom Dipol in einem sonst homogenen Raum H1 eine dünne ebene Schicht der Dicke $d\zeta$ mit der spezifischen Polarisierbarkeit α, so verändert sich die Lebensdauer des Dipols gemäß

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d} = 1 + \frac{3}{2} q_\infty \, \mathrm{Im}\left(\frac{\alpha}{4\varepsilon_1\varepsilon_0} g(\zeta)\, d\zeta\right) \qquad (6.3.-21)$$

Zum Vergleich mit der Reflexions-Methode ist nach (6.3.-5), (5.4.-11) zu setzen

$$\Delta = 2\,\delta \qquad (6.3.-22)$$

6.4. Zur Polarisierbarkeit

Die spezifische Polarisierbarkeit α läßt sich an sich auch aus der Polarisations-Methode -scheinbar konsistent- bestimmen, etwa indem man den ganzen Raum als einheitlich polarisierbar betrachtet und die Veränderung von τ analog zu 6.2. (die Integration in (6.2.-5) erstreckt sich dann über den ganzen Raum) mit der Veränderung von τ gemäß (3.5.-2), (3.6.-12) vergleicht. Man erhält recht komplizierte Ausdrücke für α. Wir gehen auf diese angedeutete Möglichkeit nicht weiter ein, weil wegen des Näherungscharakters der Polarisations-Methode die Konsistenz nur vorgetäuscht wird.

In der hier gegebenen Darstellung wird α durch die Polarisations-Methode nicht bestimmt, sondern bleibt ein Parameter.

Es liegt nahe, etwa nach /27/,I,S.348,Gl.(68)

$$\alpha := 3\varepsilon_1\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \qquad (6.4.-1)$$

mit $\varepsilon := n^2$; $\qquad n := n_2/n_1 \qquad (6.4.-2)$

zu wählen. Für die Messungen an der dielektrischen Grenzfläche bedeutet (6.4.-1) die Polarisierbarkeit des Vakuums gegenüber Tripalmitin als Grundmedium.

Bei der Wahl von α in /24/,Gl.(7)

$$\alpha := 3\,\varepsilon_0\frac{n_2^2-n_1^2}{2n_2^2+n_1^2} = -\,3\,\varepsilon_0\,\frac{1/\varepsilon-1}{1/\varepsilon+2} \qquad (6.4.-3)$$

wird im Fall der dielektrischen Messungen die Polarisierbarkeit von Tripalmitin als Grundmedium berechnet und unterhalb der Grenzfläche subtrahiert, vgl.(3.1.-F).

Die Telegraphie-Methode liefert die Ergebnisse der Polarisations-Methode als 1.Näherung bei der Entwicklung nach ξ für

$$|\xi| \ll 1 \qquad \text{mit} \quad \xi := n^2-1 = \varepsilon-1 \qquad (6.4.-4)$$

und ergibt dabei gleichzeitig die Polarisierbarkeit

$$\alpha = \varepsilon_1\,\varepsilon_0\,\xi = \varepsilon_0\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1) \qquad (6.4.-5)$$

Für dielektrische Halbräume bewirkt eine Veränderung von α nach (6.3.-20) nur eine Veränderung der Amplitude von (τ_∞/τ_d-1). Kritischer ist die Wahl von α für absorbierende "Spiegel": Hier ist α komplex und nach (6.3.-20) werden Real- und Imaginärteil von $h(\delta)$ gemischt.

6.5. Kurze Diskussion

Der Rechenaufwand war bei der Polarisations-Methode größer als bei den beiden anderen Näherungs-Methoden.

Wie die Reflexions-Methode liefert die Polarisations-Methode analytische Ergebnisse, bei der Interferenz-Methode blieben Integrale zu berechnen.

Etwas diffizil ist die Behandlung der spezifischen Polarisierbarkeit α: vgl.6.4.

Im Gegensatz zu den beiden anderen Näherungs-Methoden ist bei der Polarisations-Methode die Vernachlässigung unmittelbar einzusehen, Möglichkeiten zur Verbesserung und sogar ein exakter Ansatz ergeben sich fast zwangsläufig (vgl.6.1.).

6.6. Vergleich mit dem Experiment

Die Ergebnisse (6.3.-20) mit (6.3.-17)ff der Polarisations-Methode sind in (6.-F) für verschiedene Spiegel dargestellt, wobei die Polarisierbarkeit α gemäß (6.4.-3) gewählt wurde. Zu den sonstigen Daten und den Bezeichnungen vergleiche man 3.8.

Für die Metallspiegel stimmen die Ergebnisse der Polarisations-Methode gar nicht mit den Experimenten überein. Das überrascht nicht, da die Polarisations-Methode für optisch ähnliche Medien konzipiert wurde. Durch geeignete Wahl von α kann man zwar die Übereinstimmung mit den Experimenten erheblich verbessern; wir wollen

jedoch auf diese Möglichkeit nicht näher eingehen, da die Metallspiegel eindeutig aus dem nach 8.3. gegebenen Gültigkeitsbereich der Polarisations-Methode herausfallen, vgl. auch 6.1.

Bei der dielektrischen Grenzfläche ergibt die Polarisations-Methode für isotrope Verteilung gute Übereinstimmung mit den Meßpunkten, sogar bessere als die (exakte!) Telegraphie-Methode. Das erscheint umso merkwürdiger, wenn man bedenkt, daß erstens α aus (6.4.-3) für $\varepsilon \to 1$ nicht mit (6.4.-5) zusammenfällt und zweitens $\xi := \varepsilon - 1 \ll 1$ nicht mehr gut erfüllt ist. Hätte man α gemäß (6.4.-5) gewählt, so wäre die Amplitude von (TR-1) größer geworden und die Kurve für isotrope Verteilung wäre ungefähr mit der entsprechenden Kurve der Telegraphie-Methode zusammengefallen.

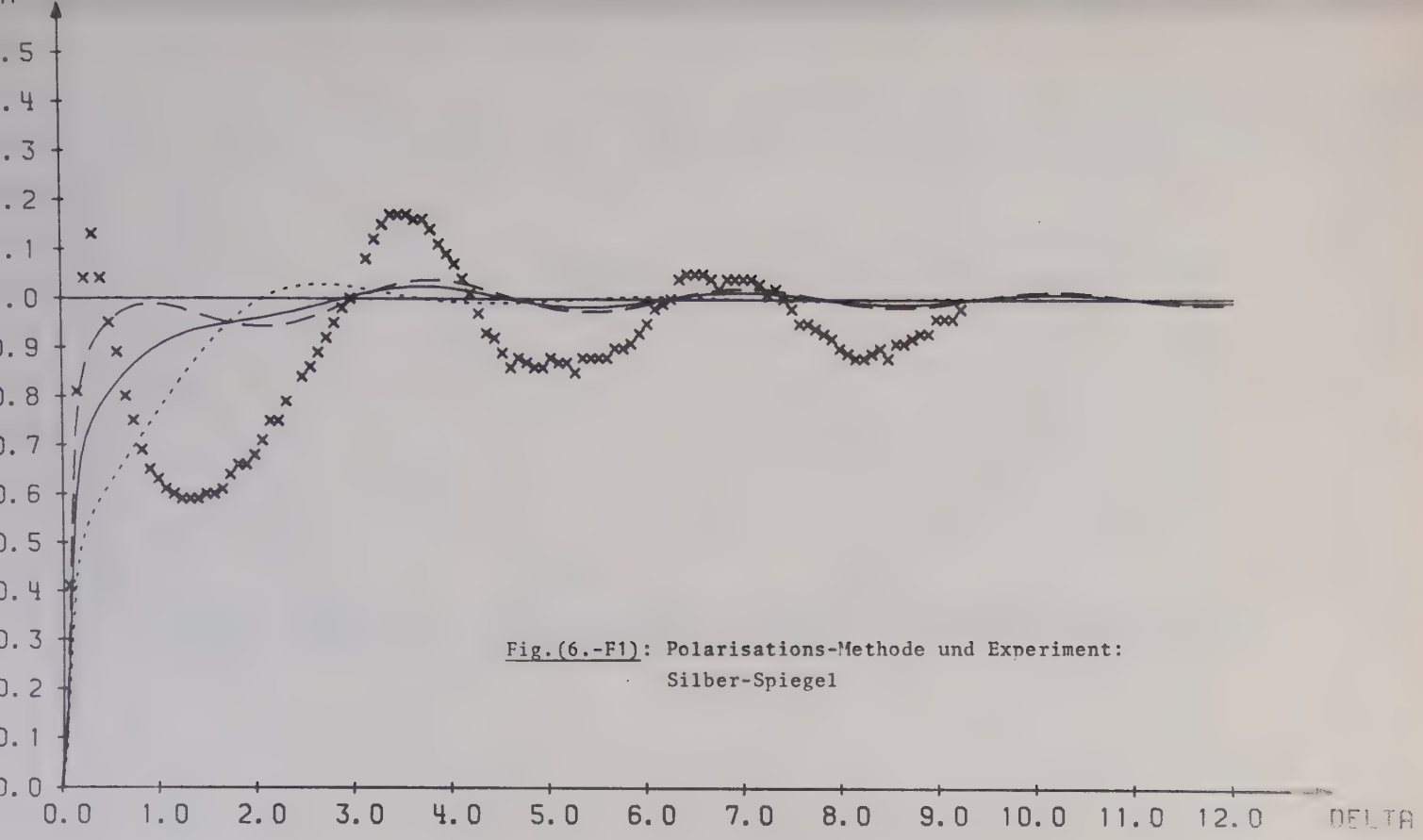


Fig.(6.-F1): Polarisations-Methode und Experiment:
Silber-Spiegel

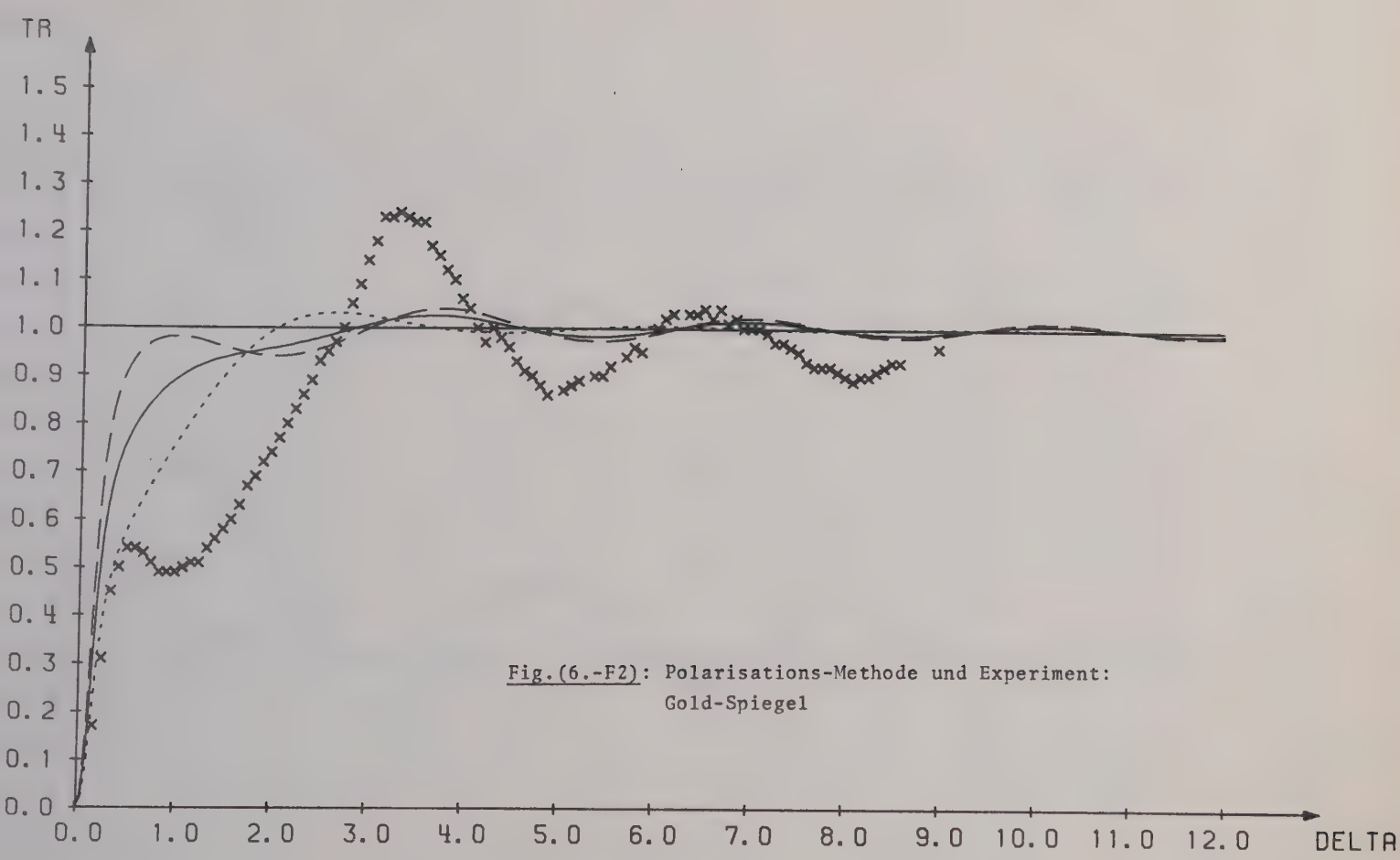


Fig.(6.-F2): Polarisations-Methode und Experiment:
Gold-Spiegel

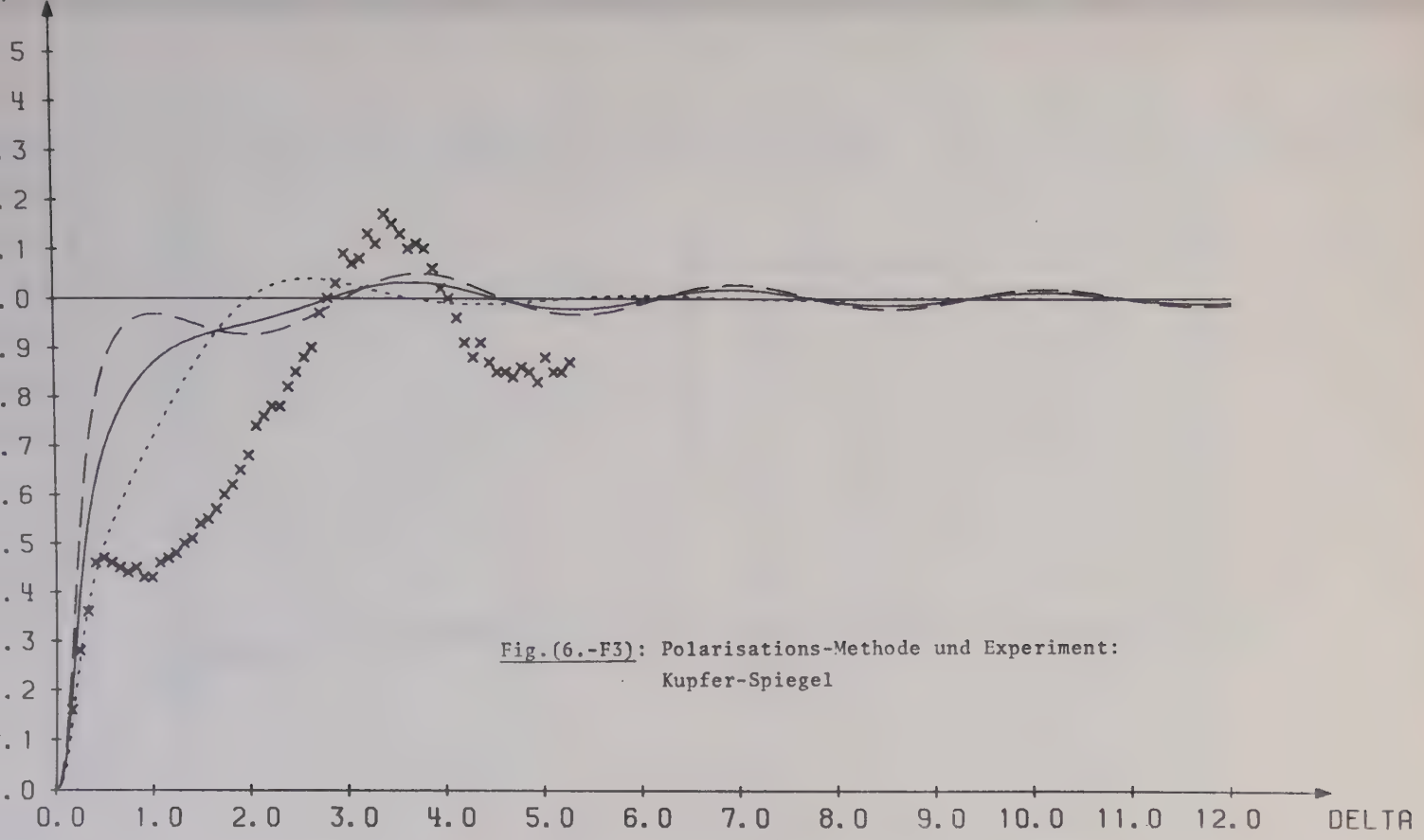


Fig.(6.-F3): Polarisations-Methode und Experiment:
Kupfer-Spiegel

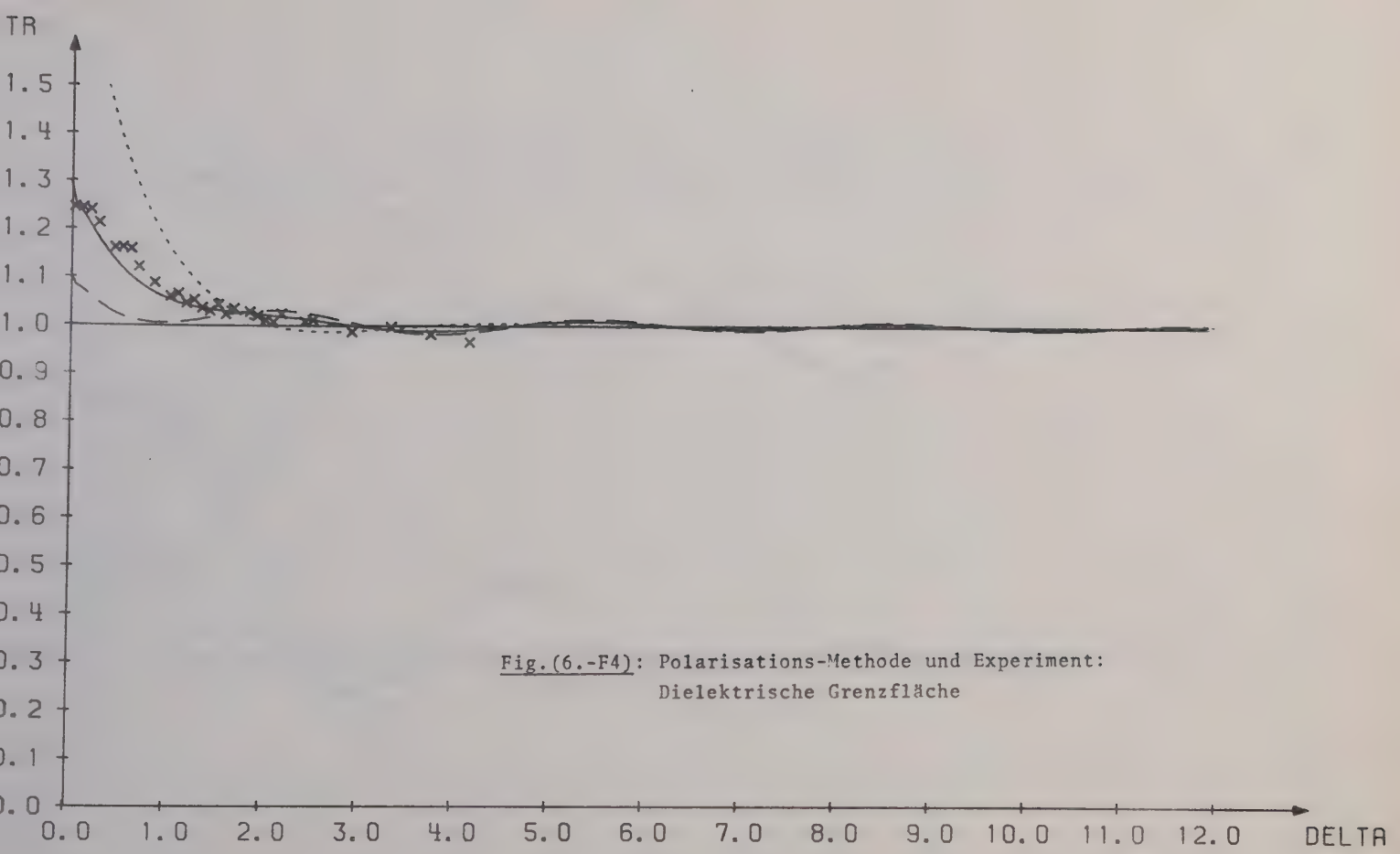


Fig.(6.-F4): Polarisations-Methode und Experiment:
Dielektrische Grenzfläche

6.7. Integrale zur Polarisations-Methode

Die bei der Polarisations-Methode in 6.3. auftretenden Integrale

$$I_n := I_n(\delta) := \int_\delta^\infty d\rho \, \frac{e^{2i\rho}}{\rho^n} \qquad (6.7.-1)$$

lassen sich auf I_1 zurückführen:

$$I_n(\delta) = \frac{(2i)^n}{n!} \cdot \{ I_1 + e^{2i\delta} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\nu-1)!}{(2i\delta)^\nu} \} \qquad (6.7.-2)$$

wie man leicht durch vollständige Induktion zeigt.
Das Integral

$$I_1(\delta) = \int_\delta^\infty d\rho \, \frac{e^{2i\rho}}{\rho} = i\pi/2 - \{Ci(2\delta)+i\cdot Si(2\delta)\} \qquad (6.7.-3)$$

setzt sich aus den Funktionen [1]

$$Ci(x) := -\int_x^\infty dt \, \frac{\cos t}{t} \qquad (6.7.-4)$$

$$Si(x) := \int_0^x dt \, \frac{\sin t}{t} \qquad (6.7.-5)$$

zusammen: vgl. etwa /26/,S.17,S.31. Ci heißt Integral-Cosinus, Si Integral-Sinus.

Für große x gelten die Näherungen

$$Ci(x) \approx \frac{\sin x}{x} ; \qquad x \gg 1 \qquad (6.7.-6)$$

$$Si(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \qquad x \gg 1 \qquad (6.7.-7)$$

---

[1] Ci und Si sind tabellierte Funktionen (vgl./26/) und standen in der ZRA /0/ als Bibliotheks-Prozeduren zur Verfügung.

und damit

$$\delta \cdot I_1(\delta) \approx \frac{i}{2} e^{2i\delta} ; \qquad \delta >> 1 \qquad (6.7.-8)$$

In 6.3. benötigen wir noch das Integral über I_1

$$\begin{aligned} \int_\delta^\Delta d\zeta\ I_1(\zeta) &= \int_\delta^\Delta d\zeta \int_\zeta^\infty d\rho\ \frac{e^{2i\rho}}{\rho} \\ &= \left[\zeta \int_\zeta^\infty d\rho\ \frac{e^{2i\rho}}{\rho} \right]_{\zeta=\delta}^{\Delta} + \int_\delta^\Delta d\zeta\ \zeta\ \frac{e^{2i\zeta}}{\zeta} \qquad (6.7.-9) \\ &= \Delta \cdot I_1(\Delta) - \delta \cdot I_1(\delta) + \frac{1}{2i} \cdot e^{2i\Delta} - \frac{1}{2i} \cdot e^{2i\delta} \end{aligned}$$

wie man durch partielle Integration findet. Mit (6.7.-8) folgt für $\Delta \to \infty$

$$\int_\delta^\infty d\zeta\ I_1(\zeta) = - \delta \cdot I_1(\delta) - \frac{1}{2i} \cdot e^{2i\delta} \qquad (6.7.-10)$$

Die in 6.3. wichtigen Integrale I_n sind gemäß (6.7.-2)f ausführlich in Tabelle (6.7.-T) zusammengestellt.

$$I_1(\delta) = i\pi/2 - \{Ci(2\delta)+iSi(2\delta)\}$$

$$I_2(\delta) = 2iI_1(\delta) + e^{2i\delta} \frac{1}{\delta}$$

$$I_3(\delta) = -2 \cdot I_1(\delta) + e^{2i\delta} \left\{ \frac{i}{\delta} + \frac{1}{2\delta^2} \right\}$$

$$I_4(\delta) = -\frac{4i}{3} I_1(\delta) + e^{2i\delta} \left\{ \frac{-2}{3\delta} + \frac{i}{3\delta^2} + \frac{1}{3\delta^3} \right\}$$

$$I_5(\delta) = \frac{2}{3} \cdot I_1(\delta) + e^{2i\delta} \left\{ \frac{-i}{3\delta} - \frac{1}{6\delta^2} + \frac{i}{6\delta^3} + \frac{1}{4\delta^4} \right\}$$

$$I_6(\delta) = \frac{4i}{15} I_1(\delta) + e^{2i\delta} \left\{ \frac{2}{15\delta} - \frac{i}{15\delta^2} - \frac{1}{15\delta^3} + \frac{i}{10\delta^4} + \frac{1}{5\delta^5} \right\}$$

$$I_7(\delta) = -\frac{4}{45} I_1(\delta) + e^{2i\delta} \left\{ \frac{2i}{45\delta} + \frac{1}{45\delta^2} - \frac{i}{45\delta^3} - \frac{1}{30\delta^4} + \frac{i}{15\delta^5} + \frac{1}{6\delta^6} \right\}$$

Tabelle (6.7.-T): Zusammenstellung der wichtigsten Integrale I_n.

7. Die Telegraphie-Methode

7.1. Einleitung und Überblick

Nach der Behandlung der drei Näherungsmethoden in 4., 5., 6. soll jetzt eine neue, bisher unveröffentlichte Methode zur theoretischen Bestimmung der Variation der Lebensdauern dargestellt werden. Diese Methode ist im Rahmen des Modells von 3.1. exakt.

Die Variation der Lebensdauer eines Dipols durch einen Halbraum H2 (vgl.3.1.) kann gemäß 3.6. über das reflektierte Eigenfeld $\vec{E}_0$ am Dipolort beschrieben werden: vgl.(3.6.-14)f. Das von H2 in H1 induzierte Feld $\vec{E}'$ wurde erstmals von Sommerfeld in seiner berühmten Arbeit /21/:

Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie
Ann.d.Phys.IV,28(1909),665-736

berechnet. Die hier behandelte Methode folgt weitgehend /21/ und soll deshalb als "Telegraphie"-Methode bezeichnet werden.

Das Problem der Ausbreitung von Wellen über der "leitenden Erde" wurde später in einer Reihe weiterer Arbeiten behandelt: vgl. etwa /22/,/12/,/28/, /20/, u.a., die sich von /21/ durch etwas modifizierte Ansätze, mathematische Methoden der Durchführung sowie vor allem durch die Näherungen der in der exakten Lösung auftretenden Integrale unterscheiden.

Vor allem wegen der in der Literatur unterschiedlichen Nomenklatur sollen die wesentlichen Schritte zur Bestimmung von $\vec{E}'$ hier noch einmal unter besonderer Berücksichtigung unseres Problems zusammengestellt werden. In 7.2. und 7.3. behandeln wir vorbereitend allgemeine Überlegungen und lösen dann in 7.4. und 7.5. das Problem der Variation der Lebensdauer für die beiden Spezialfälle $\vartheta := 0$ und $\vartheta := \pi/2$ zur größeren Übersichtlichkeit getrennt. Das Ergebnis für beliebige ϑ läßt sich dann sehr leicht angeben: vgl.7.7.4.

7.2. Zum Hertzschen Vektor

Es erweist sich als zweckmäßig, den Hertzschen Vektor $\vec{\Pi}$ einzuführen, den wir für periodische Wellen im homogenen Raum durch

$$\vec{A} = \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\vec{\Pi}} + \varkappa \vec{\Pi} = \frac{k^2}{i\omega\mu\mu_0} \vec{\Pi} \qquad (7.2.-1)$$

definieren (vgl. Anhang A4), wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential des Magnetfeldes ist: vgl.(3.2.-3).

Elektrisches Feld $\vec{E}$ und Magnetfeld $\vec{H}$ lassen sich einfach aus $\vec{\Pi}$ berechnen (vgl.A4):

$$\vec{E} = k^2 \vec{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi} \qquad (7.2.-2)$$

$$\vec{H} = \frac{k^2}{i\omega\mu\mu_0} \operatorname{rot} \vec{\Pi} \qquad (7.2.-3)$$

Sei $\mu\mu_o$ die magnetische Permeabilität eines Mediums, $\varepsilon\varepsilon_o$ seine DK, $\varkappa$ seine Leitfähigkeit, dann ist k^2 definiert durch

$$k^2 := \omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot \mu \cdot \mu_o + i\omega \cdot \mu \cdot \mu_o \cdot \varkappa \qquad (7.2.-4)$$

wobei $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz der (monochromatischen!) Felder ist: vgl.(3.2.-1). Spätere Indizes 1,2 an k, ε, μ spezifizieren diese Größen für H1,H2 nach (3.1.-F). Bzgl. μ soll der ganze Raum homogen sein:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \text{const.} \qquad (7.2.-5)$$

wie es zur Existenz von $\vec{A}$ und damit von $\vec{\Pi}$ notwendig ist.

Der Hertzsche Vektor des ungestörten elektrischen Dipols (3.2.-1) ist

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r} \vec{M}_o \, e^{i(kr-\omega t)} \qquad (7.2.-6)$$

Zur Abkürzung führen wir einen Vektor $\vec{Z}$ ein, definiert durch

$$\vec{\Pi} = \vec{Z} \frac{M_o}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_o} e^{-i\omega t} \qquad (7.2.-7)$$

$\varepsilon_1\varepsilon_o$ ist die DK von H1 (vgl.3.1.). Für den ungestörten Dipol ist also

$$\vec{Z} = \vec{M}_o^o \frac{e^{ik_1 r}}{r} \qquad (7.2.-8)$$

Den Einfluß der Grenzfläche in (3.1.-F) berücksichtigt man durch die Annahme einer "reflektierten" Welle $\vec{Z}'$ und einer "gebrochenen" Welle $\vec{Z}''$:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= \vec{Z} + \vec{Z}' \qquad \text{für } z>0 \\ \vec{Z}_2 &= \vec{Z}'' \qquad \text{für } z<0 \end{aligned} \tag{7.2.-9}$$

Konkrete Ansätze für $\vec{Z}'$ und $\vec{Z}''$ folgen in 7.4.f. Man beachte, daß $\vec{Z}_1$, $\vec{Z}_2$ jeweils nur in einem Halbraum H1 bzw. H2 definiert sind.

Nach (7.2.-8) verschwindet $\vec{Z}$ im Unendlichen, dasselbe verlangen wir von $\vec{Z}_1$ und $\vec{Z}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &\to \vec{0} \qquad \text{für } r \to \infty ; \qquad z \geq 0 \\ \vec{Z}_2 &\to \vec{0} \qquad \text{für } r \to \infty ; \qquad z \leq 0 \end{aligned} \tag{7.2.-10}$$

Mit $\vec{M}_0$ nach (3.1.-F) hat auch $\vec{Z}$ nach (7.2.-8) keine y-Komponente. Entsprechend verlangen wir für $\vec{Z}_1$, $\vec{Z}_2$

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= (Z_{1x},\ 0\ ,\ Z_{1z}) \\ \vec{Z}_2 &= (Z_{2x},\ 0\ ,\ Z_{2z}) \end{aligned} \tag{7.2.-11}$$

Außerdem sollen $\vec{Z}_1$ und $\vec{Z}_2$ gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen, die sich aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ ergeben (vgl.A6):

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ H_{1t} &= H_{2t} \end{aligned} \qquad \text{für } z:=0 \text{ und alle } x,y \tag{7.2.-12}$$

Mit (7.2.-2)f erhält man für z=0

$$\begin{aligned} k_1^2 Z_{1x} + \partial_x(\partial_x Z_{1x} + \partial_z Z_{1z}) &= k_2^2 Z_{2x} + \partial_x(\partial_x Z_{2x} + \partial_z Z_{2z}) \\ \partial_y(\partial_x Z_{1x} + \partial_z Z_{1z}) &= \partial_y(\partial_x Z_{2x} + \partial_z Z_{2z}) \\ k_1^2\, \partial_y Z_{1z} &= k_2^2\, \partial_y Z_{2z} \\ k_1^2 (\partial_z Z_{1x} - \partial_x Z_{1z}) &= k_2^2 (\partial_z Z_{2x} - \partial_x Z_{2z}) \end{aligned} \tag{7.2.-13}$$

wobei ∂_ξ die partielle Differentiation nach ξ bedeutet. Da (7.2.-13) für z=0 identisch in x,y gelten müssen, kann man beliebig nach x bzw. y differenzieren und integrieren. Eventuelle Integrationskonstanten - die ja dann von x bzw. y unabhängig wären - müssen wegen (7.2.-10) verschwinden. Damit folgen aus (7.2.-13) die notwendigen Bedingungen für z=0 identisch in x und y :

$$\begin{aligned} k_1^2\, Z_{1x} &= k_2^2\, Z_{2x} \\ k_1^2\, Z_{1z} &= k_2^2\, Z_{2z} \\ k_1^2\, \partial_z Z_{1x} &= k_2^2\, \partial_z Z_{2x} \\ \partial_x Z_{1x} + \partial_z Z_{1z} &= \partial_x Z_{2x} + \partial_z Z_{2z} \end{aligned} \qquad (7.2.-14)$$

7.3. Entwicklung nach ebenen Wellen

7.3.1. Die Entwicklung

Zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen (7.2.-14) für Z entwickelt man Z zweckmäßig nach ebenen Wellen. Eine charakteristische Schwierigkeit der Interpretation dieser Entwicklung wird am Schluß von 7.3. angedeutet. Wegen der größeren Anschaulichkeit folgen wir in der Darstellung nicht Sommerfeld (/21/,/22/) sondern Weyl (/28/).

Für z>0 gilt

$$\frac{e^{ikr}}{kr} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\cos\theta \; e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \qquad (7.3.-1)$$

wobei α,β,γ die Richtungskosinus des Vektors $\vec{k}=k\cdot(\alpha,\beta,\gamma)$ gegen die Achsen des Systems (k,θ,ϕ) sind:

$$\alpha = \sin\theta\cos\phi; \quad \beta = \sin\theta\sin\phi; \quad \gamma = \cos\theta \qquad (7.3.-2)$$

Der Integrationsweg für ϕ sei der Abschnitt $\langle 0,2\pi\rangle$ auf der reellen Achse; der Weg für $\gamma=\cos\theta$ ist beliebig und soll nur (für $z>0$) gegen $+i\infty$ gehen, wie es zur Konvergenz des Integrals in (7.3.-1) nötig ist. Drei solcher Wege für $\gamma=\cos\theta$ sind in Fig. (7.3.-F) angegeben.

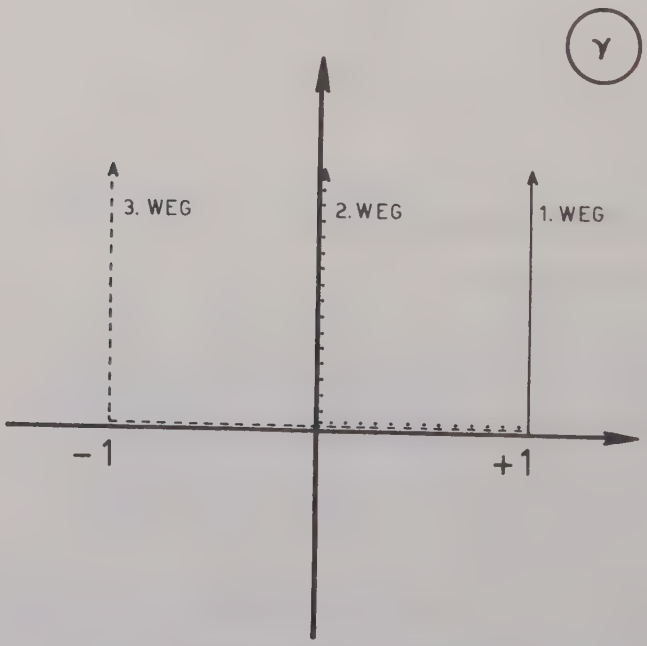


Fig.(7.3.-F): Drei einfache Integrationswege für $\gamma=\cos\theta$ in der komplexen γ-Ebene.

Der punktierte 2.Weg hat den Vorzug, daß auf ihm γ entweder rein reell oder rein imaginär ist. Wegen der schnelleren Konvergenz der Integrale ist der durchgezogene 1.Weg, der "direkte" Integrationsweg, vorzuziehen: vgl.7.8. Der 3.Weg ist nicht immer ohne besondere Sorgfalt begehbar: vgl.7.9.

7.3.2. Der erste Beweis

Ein formal einfacher Beweis für (7.3.-1) ist in /28/ angegeben:

Führt man ein Polarkoordinaten-System (k,ψ,φ) um den Radiusvektor $\vec{r} = (x,y,z)$ zum Aufpunkt ein, so wird

$$k\cdot(\alpha x+\beta y+\gamma z) = \vec{k}\cdot\vec{r} = k\cdot r\cdot\cos\psi \qquad (7.3.-3)$$

Die Integrationswege im System (k,ψ,φ) sind natürlich zunächst andere als im System (k,θ,ϕ). Gemäß dem Cauchyschen Hauptsatz der Funktionentheorie können sie aber in dieselben wie für ϕ, $\cos\theta$ transformiert werden. Dann wird die rechte Seite von (7.3.-1)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{i\infty} d\cos\psi\; e^{ikr\cos\psi} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{2\pi}{ikr}\, e^{ikr\cos\psi}\Big|_1^{i\infty} = \frac{e^{ikr}}{kr} \qquad (7.3.-4)$$

Ein gewisser Nachteil dieses Beweises liegt in der recht komplizierten Transformation der Integrationswege (auch wenn diese Transformation explizit nicht benötigt wird) sowie in der Benutzung der nicht so geläufigen Funktionentheorie mehrerer Variablen.

Wir geben daher noch einen direkteren Beweis für (7.3.-1) mit übersichtlicheren Koordinatentransformationen an.

7.3.3. Der zweite Beweis

Zunächst läßt sich (vgl.etwa /21/,S.683) die Kugelwelle als Integral über die Besselfunktion J_o erster Art nullter Ordnung darstellen:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, J_o(\lambda\rho)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z} \qquad (7.3.-5)$$

mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Der Aufpunkt ist dabei (x,y,z). Für $z > 0$ ist die Wurzel mit positivem Vorzeichen (bei $\lambda>k$) zu wählen. Die Besselfunktion läßt sich nun wieder als Integral darstellen (vgl.etwa /10/,I, S.412) :

$$J_o(v) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{ivcos\eta}\, d\eta \qquad (7.3.-6)$$

wobei Γ ein Intervall der Länge 2π auf der reellen Achse ist.

Im System (r,ψ,φ) für den Aufpunkt sei

$$\rho=r\cdot\sin\psi; \quad x=\rho\cdot\cos\varphi; \quad y=\rho\cdot\sin\varphi; \quad z=r\cdot\cos\psi \qquad (7.3.-7)$$

Wählen wir in (7.3.-6)

$$v := \lambda\cdot\rho; \quad \eta := \phi-\varphi; \quad \Gamma := \langle -\varphi, 2\pi-\varphi\rangle \qquad (7.3.-8)$$

so wird

$$J_o(\lambda\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} d\eta\, e^{i\lambda\rho\cos\eta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{i\lambda(x\cos\phi+y\sin\phi)} \qquad (7.3.-9)$$

Wir ersetzen λ durch $\cos\theta$ gemäß

$$\lambda = k\cdot\sin\theta; \qquad \sqrt{\lambda^2-k^2} = -i\cdot k\cdot\cos\theta \tag{7.3.-10}$$

dabei wählen wir das negative Vorzeichen, damit $\cos\theta \to +i\infty$ für $\lambda \to \infty$. Einsetzen von (7.3.-9) in (7.3.-5) ergibt

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_1^{i\infty} \frac{-k^2\cos\theta d\cos\theta}{-ik\cos\theta} e^{ikz\cos\theta} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{iksin\theta(x\cos\phi+y\sin\phi)}$$

$$= \frac{k}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\cos\theta\ e^{ik(x\sin\theta\cos\phi+y\sin\theta\sin\phi+z\cos\theta)} \tag{7.3.-11}$$

was wegen (7.3.-2)f mit (7.3.-1) übereinstimmt.

Der durch (7.3.-10) gemäß dieser Ableitung für $\gamma = \cos\theta$ direkt gegebene Integrationsweg ist der punktierte 2.Weg (Achsenweg) von Fig.(7.3.-F).

7.3.4. Zur Interpretation der Entwicklung

Zur Interpretation der Entwicklung (7.3.-1) folgen wir zunächst /21/. Als Integrationsweg für $\gamma = \cos\theta$ wählen wir den punktierten Achsenweg von (7.3.-F) und beschränken uns der Einfachheit halber auf reelle k. Dann läßt sich das Integral aufspalten

$$\frac{e^{ikr}}{kr} = Bh + Bi \tag{7.3.-12}$$

$$Bh := \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{0} d\cos\theta\ e^{ik(x\sin\theta\cos\phi+y\sin\theta\sin\phi+z\cos\theta)} \tag{7.3.-13}$$

$$Bi := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} du\ e^{-kuz}\ e^{ik\sqrt{u^2+1}(x\cos\phi+y\sin\phi)} \tag{7.3.-14}$$

Die Teilintegrale Bh und Bi lassen sich leicht interpretieren:
Bh ist das Bündel aller homogenen ebenen Wellen des oberen Halbraums $\cos\theta \geq 0$ mit der Amplitude $1/2\pi i$ und der Wellenlänge $\lambda h = 2\pi/k$.
Auch Bi ist ein Bündel ebener Wellen [1]. Diese Wellen breiten sich senkrecht zur z-Achse aus. Die Flächen konstanter Amplitude sind die Ebenen z=const senkrecht zur z-Achse. Daher bezeichnet man diese ebenen Wellen als inhomogen. Man beachte, daß die Wellen von Bi die kleinere Wellenlänge $\lambda i = \lambda h/\sqrt{u^2+1}$ haben.

Die schon beim ersten Beweis von (7.3.-1) angedeutete große Freiheit in der Wahl des Koordinaten-Systems sowie des Integrationsweges entzieht der dargestellten Interpretation von (7.3.-1) jedoch weitgehend die physikalische Bedeutung:
Hätten wir etwa zur Integration den 3.Weg von (7.3.-F) gewählt, so wären auch die homogenen ebenen Wellen mit $\cos\theta < 0$ aufgetreten; bei Wahl des 1. Weges erscheint die Kugelwelle nur aus inhomogenen ebenen Wellen zusammengesetzt.

Es gibt offenbar sehr viele verschiedene Möglichkeiten, aus ebenen Wellen die Kugelwelle zu konstruieren. Diese Vielfalt ermöglicht manchmal eine Aufspaltung der exakten Lösung eines Problems in einen - evtl. auf ganz anderem Wege gewonnenen - Näherungsterm mit physikalisch sehr durchsichtiger Bedeutung und einen Korrekturterm. Ein einfaches Beispiel gibt die Interferenz-Methode: vgl.8.2.

---

[1] Das Bündel Bi der inhomogenen ebenen Wellen wurde offenbar bei der Interferenz-Methode nicht berücksichtigt: vgl.8.2.

7.3.5. Eine einfache Erweiterung

Befindet sich der Ursprung der Kugelwelle nicht im Nullpunkt des Koordinaten-Systems, sondern wie in (3.1.-F) im Punkt $P_o=(0,0,d)$, so kann man offenbar (7.3.-1) ersetzen durch

$$\frac{e^{ikR}}{kR} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\Phi \int_1^{i\infty} d\cos\theta \; e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma|z-d|)} \qquad (7.3.-15)$$

wobei R der Abstand des Aufpunktes (x,y,z) von P_o ist:

$$R := \sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2} \qquad (7.3.-16)$$

7.4. Der senkrechte Dipol

Nach den Vorbereitungen in 7.2.f ist es nun einfach, explizite Lösungen anzugeben. Zur größeren Übersichtlichkeit betrachten wir die beiden Spezialfälle (Hauptlagen) des senkrechten Dipols ($\vartheta := 0$) und des parallelen Dipols ($\vartheta := \pi/2$) getrennt und setzen später die allgemeine Lösung (ϑ beliebig) aus den beiden speziellen Lösungen zusammen: vgl.7.7.4.

Sei also $\vartheta := 0$. Dann hat $\vec{Z}$ nach (7.2.-8) keine x-Komponente und für $\vec{Z}'$, $\vec{Z}''$ bzw. $\vec{Z}_1$, $\vec{Z}_2$ gelten die Gleichungen (7.2.-9)ff:

$$\begin{aligned} \vec{Z} &= (0\ ,\ 0\ ,\ Z\ ) \\ \vec{Z}' &= (Z'_x,\ 0\ ,\ Z'_z) \\ \vec{Z}'' &= (Z''_x,\ 0\ ,\ Z''_z) \end{aligned} \qquad (7.4.\text{-}1)$$

Der Hertzsche Vektor $\vec{Z}$ des ungestörten Dipols läßt sich nach (7.2.-8), (7.3.-1), (7.3.-15) in ebene Wellen entwickeln. Entsprechende Ansätze machen wir für $\vec{Z}'$, $\vec{Z}''$:

$$Z = \frac{k_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma\ e^{ik_1(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma|z-d|)} \qquad (7.4.\text{-}2)$$

$$Z'_\nu = \frac{k_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma\ e^{ik_1(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)+ik_1\gamma d}\ f'_\nu \qquad (7.4.\text{-}3)$$

$$Z''_\nu = \frac{k_1^2}{2\pi i k_2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma\ e^{ik_2(\alpha'' x+\beta'' y-\gamma'' z)+ik_1\gamma d}\ f''_\nu \qquad (7.4.\text{-}4)$$

mit $\nu := x,z$. Dabei sollen die Koeffizienten in den Exponenten analog zu (7.3.-2) zusammenhängen:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \sin\theta \cos\phi\ ; & \beta = \sin\theta \sin\phi\ ; & \gamma = \cos\theta \\ \alpha' = \sin\theta' \cos\phi'; & \beta' = \sin\theta' \sin\phi'; & \gamma' = \cos\theta' \\ \alpha'' = \sin\theta'' \cos\phi''; & \beta'' = \sin\theta'' \sin\phi''; & \gamma'' = \cos\theta'' \end{array} \qquad (7.4.-5)$$

f'_x, f'_z, θ', ϕ', f''_x, f''_z, θ'', ϕ'' sollen gewisse noch festzulegende Funktionen der Integrations-Variablen γ, ϕ sowie evtl. der k_1, k_2 sein, dagegen nicht vom Aufpunkt (x,y,z) abhängen.

Die Besonderheiten der Ansätze (7.4.-3)f dienen der Einfachheit der folgenden Beziehungen: Die Wahl der Faktoren vor den Integralen führt dazu, daß f'_z, f''_z genau die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten sind; wegen der besonderen Behandlung der d-Terme tritt d in den Stetigkeitsbedingungen nicht mehr auf; durch die Wahl der Vorzeichen der z-Terme wird erreicht, daß mit $\gamma \to +i\infty$ auch $\gamma' \to +i\infty$ und $\gamma'' \to +i\infty$ gehen. Durch die Wahl der relativen Vorzeichen von z- und d-Term wird schon im Ansatz nahegelegt, daß $\tilde{Z}'$, $\tilde{Z}''$ in ihrem Gültigkeitsbereich regulär sind: Die Singularität[1] - ein Pol 1.Ordnung analog (7.3.-1) - liegt im jeweils anderen Halbraum.

$\tilde{Z}_1$ und $\tilde{Z}_2$ müssen an der Grenzfläche z=0 die Stetigkeitsbedingungen (7.2.-14) erfüllen. Wir verlangen nun, daß diese Grenzbedingungen[2] schon für die ebenen Partialwellen erfüllt sind; dann sind sie sicher-

---

1) Hier ist die Singularität des Integrals gemeint; bzgl. eventueller Singularitäten des Integranden vgl.7.9.

2) Man könnte auch die Forderung (7.2.-10) auf die Partialwellen erweitern, was die Diskussion der Singularitäten in 7.9. etwas vereinfachen würde. Wir verzichten darauf, um die Integrationswege nicht unnötig zu beschränken: vgl.7.9.6.

lich - Konvergenz der Integrale vorausgesetzt - auch für die Hertzschen Vektoren erfüllt.

So ergibt sich aus (7.2.-14.2)

$$k_1^2 \{k_1 e^{ik_1(\alpha x+\beta y)} + k_1 f_z' e^{ik_1(\alpha' x+\beta' y)}\} = k_2^2 \frac{k_1^2}{k_2} f_z'' e^{ik_2(\alpha'' x+\beta'' y)} \qquad (7.4.-6)$$

(7.4.-6) soll für alle Partialwellen identisch in x und y erfüllt sein, daher folgt sofort

$$k_1\alpha = k_1\alpha' = k_2\alpha''; \quad k_1\beta = k_1\beta' = k_2\beta'' \qquad (7.4.-7)$$

Man führt zweckmäßig den im allgemeinen komplexen relativen Brechungsindex n ein

$$n := k_2/k_1 \qquad (7.4.-8)$$

Für die durch (7.4.-5) definierten "Winkel" θ', θ'', ϕ', ϕ'' ergeben sich nach kleiner Zwischenrechnung die Gesetze der regulären Reflexion und das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\phi' = \phi; \quad \theta' = \theta$$
$$\phi'' = \phi; \quad k_2 \cdot \sin\theta'' = k_1 \cdot \sin\theta \qquad (7.4.-9)$$

und damit

$$n\gamma'' = \sqrt{\gamma^2+n^2-1}; \quad n\gamma''-\gamma \to 0 \quad \text{für} \quad \gamma \to +i\infty \qquad (7.4.-10)$$

(7.4.-10.2) bestimmt das Vorzeichen der (stetigen!) Wurzel in (7.4.-10.1).

Mit (7.4.-7)f werden die Grenzbedingungen (7.2.-14) für die Partialwellen einfach:

$$\begin{aligned} f'_x &= n\, f''_x \\ 1+f'_z &= n\, f''_z \\ \gamma f'_x &= -n\gamma'' n f''_x \\ \alpha f'_x - \gamma + \gamma f'_z &= \frac{1}{n}\,(\alpha f''_x - n\gamma'' f''_z) \end{aligned} \qquad (7.4.-11)$$

Aus (7.4.-11.1), (7.4.-11.3) folgt wegen (7.4.-10.2) das Verschwinden aller x-Komponenten:

$$f'_x = f''_x = 0 \qquad (7.4.-12)$$

Die vollständige Lösung besitzt also wie im ungestörten Fall Rotations-Symmetrie um die z-Achse.

Wegen (7.4.-12) vereinfacht sich (7.4.-11) zu

$$1 + f'_z = n \cdot f''_z \;; \qquad \gamma - \gamma \cdot f'_z = \gamma'' \cdot f''_z \qquad (7.4.-13)$$

mit der Lösung

$$f'_z = \frac{n\gamma - \gamma''}{n\gamma + \gamma''} \;; \qquad f''_z = \frac{2\cdot\gamma}{n\gamma + \gamma''} \qquad (7.4.-14)$$

f'_z und f''_z sind genau die Koeffizienten der Fresnelschen Formeln für die zur Einfallsebene parallelen Komponenten des elektrischen Feldes: vgl.7.6.4.

Setzt man noch (7.4.-14) in (7.4.-3)f ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (7.4.-7)f endlich

$$Z'_x = Z''_x = 0 \qquad (7.4.-15)$$

$$Z'_z = \frac{k_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma\; e^{ik_1(\alpha x + \beta y + \gamma z + \gamma d)}\, \frac{n\gamma - \gamma''}{n\gamma + \gamma''} \qquad (7.4.-16)$$

$$Z''_z = \frac{k_1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma\; e^{ik_1(\alpha x + \beta y - n\gamma'' z + \gamma d)}\, \frac{2\cdot\gamma}{n\gamma + \gamma''} \qquad (7.4.-17)$$

7.5. Der parallele Dipol

Die Behandlung des parallelen Dipols ($\vartheta := \pi/2$) verläuft weitgehend wie die des senkrechten Dipols in 7.4. Wir verzichten daher auf eine Wiederholung der Gleichungen von 7.4. und skizzieren zunächst nur den Gang.

Die Hertzschen Vektoren setzen wir wie in (7.4.-1) ohne y-Komponente an; $\vec{Z}$ hat jetzt allerdings statt (7.4.-1.1) die Form

$$\vec{Z} = (Z, 0, 0) \tag{7.5.-1}$$

also statt der z-Komponente nur eine x-Komponente, die aber identisch ist mit der z-Komponente von (7.4.-1.1) nach (7.4.-2).

Wir machen für $\vec{Z}'$ und $\vec{Z}''$ dieselben Ansätze wie in (7.4.-3)f. Die Stetigkeitsbedingungen sind auch jetzt die Gleichungen (7.2.-14). Brechungs- und Reflexions-Gesetz findet man wie in 7.4., nur jetzt aus (7.2.-14.1) statt aus (7.2.-14.2).

Wegen (7.5.-1) erhält man aber jetzt als Grenzbedingungen für die Partialwellen statt (7.4.-11):

$$\begin{aligned} 1 + f_x' &= n\, f_x'' \\ f_z' &= n\, f_z'' \\ \gamma - \gamma\, f_z' &= n\, \gamma''\, n\, f_z'' \\ \alpha + \alpha\, f_x' + \gamma\, f_z' &= \frac{1}{n}\, \alpha\, f_x'' - \gamma''\, f_z'' \end{aligned} \tag{7.5.-2}$$

Zunächst darf im allgemeinen [1] keine der x-Komponenten verschwinden, damit sich (7.5.-2.1) und (7.5.-2.3) nicht widersprechen. Aber auch die z-Komponenten dürfen nicht verschwinden [1], sonst würden sich (7.5.-2.1) und (7.5.-2.4) widersprechen. Durch den parallelen Dipol werden also im allgemeinen [1] auch senkrechte Komponenten der Hertzschen Vektoren induziert.

Aus (7.5.-2) folgt

$$f'_x = \frac{\gamma - n\gamma''}{\gamma + n\gamma''} \; ; \qquad f'_z = \frac{2\alpha\gamma(1-n^2)}{n\cdot(n\gamma+\gamma'')(\gamma+n\gamma'')} \tag{7.5.-3}$$

$$f''_x = \frac{2\gamma/n}{\gamma + n\gamma''} \; ; \qquad f''_z = \frac{2\alpha\gamma(1-n^2)}{n^2(n\gamma+\gamma'')(\gamma+n\gamma'')} \tag{7.5.-4}$$

und damit erhält man aus (7.4.-3)f für die Komponenten der Hertzschen Vektoren $\vec{Z}'$, $\vec{Z}''$:

$$Z'_x = \frac{k_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y+\gamma z+\gamma d)} \; \frac{\gamma - n\gamma''}{\gamma + n\gamma''} \tag{7.5.-5}$$

$$Z''_x = \frac{k_1}{2\pi i n}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y-n\gamma'' z+\gamma d)} \; \frac{2\gamma/n}{\gamma + n\gamma''} \tag{7.5.-6}$$

$$Z'_z = \frac{k_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y+\gamma z+\gamma d)} \; \frac{2\alpha\gamma(1-n^2)}{n\cdot(n\gamma+\gamma'')(\gamma+n\gamma'')} \tag{7.5.-7}$$

$$Z''_z = \frac{k_1}{2\pi i n}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y-n\gamma'' z+\gamma d)} \; \frac{2\alpha\gamma(1-n^2)}{n^2(n\gamma+\gamma'')(\gamma+n\gamma'')} \tag{7.5.-8}$$

---

[1] Wir betrachten hier beliebige n: Die beiden Grenzfälle $n := 1$ und $n \to \infty$ werden in 7.6.1., 7.6.2. kurz diskutiert.

7.6. Zwischenbemerkungen

7.6.1. Erster Grenzfall: fehlender Spiegel

Nach den Berechnungen von $\vec{Z}'$ und $\vec{Z}''$ für die Spezialfälle des senkrechten und des parallelen Dipols in 7.4., 7.5. sollen hier zunächst zum Test der Ergebnisse zwei einfache Grenzfälle untersucht werden.

Sind die beiden Halbräume H1 und H2 von (3.1.-F) optisch gleich (fehlender Spiegel), so wird nach (7.4.-8) und (7.4.-10)

$$n = 1 \; ; \qquad \gamma'' = \gamma \tag{7.6.-1}$$

Wegen $|z-d| = -z+d$ für $z < d$ folgt für den senkrechten Dipol nach (7.4.-14)

$$\begin{aligned} f_z' &= 0 \; ; & f_z'' &= 1 \\ Z_x' &= Z_x'' = Z_z' = 0 \; ; & Z_z'' &= Z \end{aligned} \tag{7.6.-2}$$

und für den parallelen nach (7.5.-3) bis (7.5.-8)

$$\begin{aligned} f_x' &= f_z' = f_z'' = 0 \; ; & f_x'' &= 1 \\ Z_x' &= Z_z' = Z_z'' = 0 \; ; & Z_x'' &= Z \end{aligned} \tag{7.6.-3}$$

Der Hertzsche Vektor in H2 ist gleich dem des ungestörten Dipols, eine reflektierte Welle ist nicht vorhanden.

7.6.2. Zweiter Grenzfall: idealer Spiegel

Beim idealen Spiegel ($n \to \infty$) wird nach (7.4.-10)

$$\gamma'' \to 1 \qquad \text{für} \quad n \to \infty \tag{7.6.-4}$$

Für den senkrechten Dipol folgt nach (7.4.-14)f

$$f_z'' = 0 \; ; \qquad f_z' = 1$$
$$Z_x' = Z_x'' = Z_z'' = 0 \; ; \qquad Z_z'(d) = Z(-d) \tag{7.6.-5}$$

und für den parallelen Dipol folgt nach (7.5.-3) bis (7.5.-8)

$$f_z' = f_x'' = f_z'' = 0 \; ; \qquad f_x' = -1$$
$$Z_z' = Z_x'' = Z_z'' = 0 \; ; \qquad Z_x'(d) = -Z(-d) \tag{7.6.-6}$$

Die reflektierte Welle rührt scheinbar von einem Spiegeldipol gleicher Stärke her. Der Spiegeldipol des senkrechten Dipols hat dasselbe Vorzeichen wie der ursprüngliche Dipol, der des parallelen Dipols hat das entgegengesetzte Vorzeichen; diese Ergebnisse stehen in Übereinstimmung mit (3.7.-F). Im unteren Halbraum H2 ist kein Feld.

7.6.3. Vergleich mit Sommerfeld

Ein Vergleich unserer Ergebnisse in 7.4.f mit Sommerfeld /21/ ist wegen der unterschiedlichen Nomenklatur etwas mühsam. Wir verzichten daher hier auf detaillierte Rechnungen und geben nur die Ergebnisse an.

Die Hertzschen Vektoren werden bei Sommerfeld mit Π bezeichnet und entsprechen unseren Größen $\tilde{Z}$.

Für den senkrechten (vertikalen) Dipol wird bei $d \to 0$

$$\begin{aligned} Z &\to \Pi_{prim} \\ Z_{1z} = Z + Z'_z &\to 2\,\Pi_o \\ Z''_z &\to 2\,\Pi \end{aligned} \qquad (7.6.-7)$$

und für den parallelen (horizontalen) Dipol

$$\begin{aligned} Z_{1x} = Z + Z'_x &\to 2\,\Pi_{xo} \\ Z''_x &\to 2\,\Pi_x \\ Z'_z &\to 2\,\Pi_{zo} \\ Z''_z &\to 2\,\Pi_z \end{aligned} \qquad (7.6.-8)$$

Sämtliche Komponenten außer der Primärerregung $\Pi_{prim}=Z$ unterscheiden sich also um den Faktor 2 von unseren Ergebnissen. Dieser Fehler in /21/ und /22/, der z.T. auch noch in /10/ auftritt und erst in /23/,VI vollständig korrigiert ist, wird durch einen falschen Ansatz verursacht. Sommerfeld legt nämlich der primären Dipol in die Grenzfläche, berücksichtigt ihn aber nur im oberen Medium.

7.6.4. Die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten

Bei der Untersuchung der Reflexion ebener Wellen an ebenen Grenzflächen zweier Medien gewinnt man die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten ρ_p, ρ_s - vgl.etwa /27/,I,S.503,Gl.(20b),(20d) - für die zur Einfallsebene parallelen bzw. senkrechten Komponenten des elektrischen Feldes

$$\rho_p = \frac{n\gamma-\gamma''}{n\gamma+\gamma''} \; ; \qquad \rho_s = \frac{\gamma-n\gamma''}{\gamma+n\gamma''} \tag{7.6.-9}$$

wobei $n:=n_2/n_1$ der relative Brechungsindex der beiden Medien ist und γ bzw. γ'' die Cosinus des Einfalls- bzw. Brechungswinkels (Winkel zum Lot nach der Brechung) bedeuten.

ρ_p und ρ_s wurden zunächst abgeleitet für reelle n (Dielektrika), γ und γ''. Sie ließen sich verallgemeinern für komplexe γ'' bei der Totalreflexion.

Bei der Reflexion an Metallen werden n und damit γ'' komplex. Der Cosinus γ des Einfallswinkels ist weiterhin reell: $0 \leq \gamma \leq 1$.

Hier -vgl.etwa (7.4.-14)- werden die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten noch weiter verallgemeinert auf ebenfalls komplexe Einfallswinkel θ mit $\gamma=\cos\theta$.

7.7. Reflektierte Felder am Dipolort

7.7.1. Hilfsmittel

Nach (3.6.-14)f ist für die Berechnung der Lebensdauer-Variation der Vektor $\vec{F}$ zu bestimmen, der sich vom reflektierten Eigenfeld am Dipolort nur durch einen von d unabhängigen Faktor unterscheidet. Durch Vergleich von (3.6.-14), (7.2.-2) und (7.2.-7) findet man

$$\vec{F} = \frac{1}{k_1^3} \{ k_1^2 \vec{Z}' + \text{grad div } \vec{Z}' \}|_{P_o} \qquad (7.7.-1)$$

Der Wert der geschweiften Klammer ist am Dipolort $P_o=(0,0,d)$ zu nehmen: vgl.(3.1.-F). Man beachte, daß sich F allein aus der reflektierten Welle berechnet (nicht etwa aus $\vec{Z}_1$!).

Zur Abkürzung setzen wir wie in (6.3.-5)

$$\delta := k_1 d \qquad (7.7.-2)$$

Wir werden die Integration über Φ nach der Differentiation gleich ausführen, wobei nach der Definition von α, β, γ in (7.3.-2) einige Integrale verschwinden:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\Phi\ \alpha = \int_0^{2\pi} d\Phi\ \beta = \int_0^{2\pi} d\Phi\ \alpha\,\beta = 0 \\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Phi\ \alpha^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Phi\ \beta^2 = \frac{1}{2}(1-\gamma^2) \\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Phi = 1 \end{aligned} \qquad (7.7.-3)$$

7.7.2. Der senkrechte Dipol

Aus (7.4.-15)f erhält man mit den Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten von (7.6.-9) für den senkrechten Dipol

$$Z_x' = 0$$

$$Z_z' = \frac{k_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y+\gamma z+\gamma d)} \; \rho_p \qquad (7.7.-4)$$

Nach (7.7.-1) wird für die Komponenten von F

$$F_x = \frac{1}{k_1^3} \partial_x \partial_z Z_z'$$
$$F_y = \frac{1}{k_1^3} \partial_y \partial_z Z_z'$$
$$F_z = \frac{1}{k_1^3} \{ k_1^2 Z_z' + \partial_z \partial_z Z_z' \}$$

Für $P_o=(0,0,d)$ wird mit (7.7.-2)f

$$\frac{1}{k_1^3}\partial_x\partial_z Z_z' = \frac{1}{k_1^3} \frac{k_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} ik_1\alpha ik_1\gamma\rho_p = 0$$

$$\frac{1}{k_1^3}\partial_y\partial_z Z_z' = \frac{1}{k_1^3} \frac{k_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} ik_1\beta ik_1\gamma\rho_p = 0$$

$$\frac{1}{k_1^3} k_1^2 Z_z' = \frac{1}{k_1} \frac{k_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \rho_p = -i\int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \rho_p$$

$$\frac{1}{k_1^3}\partial_z\partial_z Z_z' = \frac{1}{k_1^3} \frac{k_1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} ik_1\gamma ik_1\gamma\rho_p =$$

$$= i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_p \; \gamma^2$$

und damit erhält man

$$F_x = 0 \; ; \qquad F_y = 0 \; ; \qquad F_z = i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_p \; (\gamma^2-1) \qquad (7.7.-5)$$

Das reflektierte Eigenfeld des senkrechten Dipols besitzt am Dipolort nur eine z-Komponente.
Mit (3.6.-14) wird

$$F_t := \vec{F} \cdot \vec{M}_0^0 = F_z = i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_p \; (\gamma^2-1) \qquad (7.7.-6)$$

7.7.3. Der parallele Dipol

Aus (7.5.-5) und (7.5.-7) erhält man mit den Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten von (7.6.-9) für die reflektierte Welle des parallelen Dipols nach leichter Umrechnung

$$\begin{aligned} Z_x' &= \frac{k_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y+\gamma z+\gamma d)} \; \rho_s \\ Z_z' &= \frac{k_1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{ik_1(\alpha x+\beta y+\gamma z+\gamma d)} \; \frac{\alpha\gamma}{1-\gamma^2} \; (\rho_p+\rho_s) \end{aligned} \qquad (7.7.-7)$$

Nach (7.7.-1) gilt damit für die Komponenten von $\vec{F}$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{k_1^3} \{ k_1^2 Z_x' + \partial x \partial x Z_x' + \partial x \partial z Z_z' \} \\ F_y &= \frac{1}{k_1^3} \{ \qquad\quad \partial y \partial x Z_x' + \partial y \partial z Z_z' \} \\ F_z &= \frac{1}{k_1^3} \{ k_1^2 Z_z' + \partial z \partial x Z_x' + \partial z \partial z Z_z' \} \end{aligned}$$

Für $P_o=(0,0,d)$ wird mit (3.6.-2)f

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1^3} k_1^2 Z_x' &= -i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_s \\ \frac{1}{k_1^3} \partial x \partial x Z_x' &= +i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_s \; \frac{1}{2} \; (1-\gamma^2) \\ \frac{1}{k_1^3} \partial x \partial z Z_z' &= +i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \; \frac{1-\gamma^2}{2} \; (\rho p+\rho s) \end{aligned}$$

$$\partial_y \partial_x Z'_x = 0$$

$$\partial_y \partial_z Z'_z = 0$$

$$Z'_z = 0$$

$$\partial_z \partial_x Z'_x = 0$$

$$\partial_z \partial_z Z'_z = 0$$

und damit erhält man

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{i}{2} \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; (\gamma^2 \rho_p - \rho_s) \\ F_y &= 0 \\ F_z &= 0 \end{aligned} \qquad (7.7.-8)$$

Das reflektierte Eigenfeld des parallelen Dipols besitzt am Dipolort nur eine x-Komponente.
Mit (3.6.-14) ergibt sich

$$F_{\parallel} := \vec{F} \cdot \vec{M}_o^0 = F_x = \frac{i}{2} \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; (\gamma^2 \rho_p - \rho_s) \qquad (7.7.-9)$$

7.7.4. Beliebige Dipolstellung

In 7.7.2. und 7.7.3. wurden die Funktionen F für die beiden Hauptlagen $\vartheta := 0$ und $\vartheta := \pi/2$ des Dipols berechnet, wobei ϑ in (3.1.-F) definiert ist. Bildet der Dipol einen beliebigen Winkel ϑ mit der z-Achse in der xz-Ebene,

$$\vec{M} = (M \sin\vartheta, 0, M \cos\vartheta) = (M_{\rightarrow}, 0, M_{\uparrow}) \qquad (7.7.-10)$$

so läßt er sich aufspalten in zwei Dipole $M_{\rightarrow}$, $M_{\uparrow}$ in den Hauptlagen. Die reflektierten Eigenfelder $F_{\rightarrow}$, $F_{\uparrow}$ von $M_{\rightarrow}$, $M_{\uparrow}$ haben am Dipolort gemäß (7.7.-5),(7.7.-8) nur Komponenten in Richtung der zugehörigen Dipolmomente, sie beeinflussen sich also gegenseitig nicht. Für das reflektierte Eigenfeld von $\vec{M}$ gilt demnach

$$\vec{F}(\vartheta) = (F_{\rightarrow}\sin\vartheta, 0, F_{\uparrow}\cos\vartheta) \qquad (7.7.-11)$$

Damit läßt sich $F(\vartheta)$ gemäß (3.6.-14) in einfacher Weise aus den Ergebnissen für die Hauptlagen bestimmen:

$$F(\vartheta) := \vec{F}(\vartheta)\cdot\vec{M}_o^0(\vartheta) = F_{\rightarrow}\sin^2\vartheta + F_{\uparrow}\cos^2\vartheta \qquad (7.7.-12)$$

Für isotrope Verteilung (vgl.A7) erhält man nach (A7-1) bzw. (A7-23)

$$F_{is} = \frac{2}{3} F_{\rightarrow} + \frac{1}{3} F_{\uparrow} \qquad (7.7.-13)$$

7.8. Zur numerischen Integration

Die Lebensdauern lassen sich nach (3.6.-15) aus F bestimmen, wobei F=F(ϑ) gemäß (7.7.-12) auf die Ergebnisse $F_{\rightarrow}$, $F_{\uparrow}$ für die Hauptlagen zurückgeführt werden kann. Zur expliziten Berechnung der in (7.7.-6) und (7.7.-9) für $F_{\rightarrow}$, $F_{\uparrow}$ angegebenen Ausdrücke ist noch eine Integration erforderlich, die numerisch durchgeführt wurde. Dabei sind Integrationsweg und obere Integrationsgrenze og festzulegen.

Wegen der Exponentialfunktion in den Integranden von (7.7.-6), (7.7.-9) erscheint es sinnvoll, den Imaginärteil von γ ($k_{\uparrow}$ und damit nach (7.7.-2) δ sind reell) möglichst schnell möglichst groß werden zu lassen: Dann nämlich kann man sich auf kurze Integrationswege beschränken. Für die numerische Integration wurde daher der direkte Weg -1.Weg von (7.3.-F)- gewählt. Die Integration auf dem direkten Weg war -auch wegen der Achsennähe des Pols γ_0 für Metalle: vgl.(7.9.-9)- erheblich schneller als die Integration auf dem Achsenweg -2.Weg von (7.3.-F)- .

Man könnte nun soweit numerisch integrieren, bis sich die Reihenentwicklungen von ρ_p und ρ_s um den Punkt ∞ nach dem ersten Glied hinreichend genau abbrechen lassen und das Restintegral analytisch berechnen. Eine ausführliche Untersuchung, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, zeigte aber, daß es bedeutend günstiger ist (Integrationsweg und damit Zeitbedarf der numerischen Integration wurden erheblich kleiner), wenn man nur bis

$$og := a/2\delta; \qquad a := 40 \tag{7.8.-1}$$

integriert und das Restintegral vernachlässigt. Für uns erwies sich $a \approx 40$ als voll ausreichend: absoluter Fehler der Integration $< 10^{-12}$ für $\delta > 0.1$.

7.9. Singularitäten

7.9.1. Beschränkungen

Wir haben bisher Konvergenzfragen der Integrale nur gestreift und wollen uns auch jetzt auf eine sehr knappe Diskussion eventueller Singularitäten beschränken, zumal ein erheblicher Teil der Literatur zum Problem der "Wellen über der leitenden Erde" (vgl.7.1.) der funktionentheoretischen Untersuchung der induzierten Hertzschen Vektoren Z', Z" gewidmet ist.

In der hier benutzten Nomenklatur liegt der Brechungsindex n_M eines Mediums stets im 1.Quadranten der komplexen Ebene

$$Re(n_M) > 0 \; ; \qquad Im(n_M) \geq 0 \tag{7.9.-1}$$

(vgl.etwa /27/,I,S.474): Nur für $Im(n_M) \geq 0$ wird die Amplitude von $\vec{E}$ bei Absorption kleiner. (7.9.-1) braucht nicht für den relativen Brechungsindex n zu gelten - die dann auftretenden Komplikationen werden in 7.9.5. gestreift. Zunächst verlangen wir, (7.9.-1) noch verschärfend,

$$Re(n) > 0 \; ; \qquad Im(n) > 0 \tag{7.9.-2}$$

Auch den Integrationsweg für γ beschränken wir zunächst (vgl.7.9.6.) auf den 1.Quadranten

$$Re(\gamma) \geq 0 \; ; \qquad Im(\gamma) \geq 0 \tag{7.9.-3}$$

7.9.2. Die Verzweigungspunkte $\gamma''=0$

In den Integranden tritt die Wurzel $n\gamma''=\sqrt{\gamma^2+n^2-1}$ auf mit den zweiblättrigen Verzweigungspunkten bei $\gamma''=0$. Nun liegt γ^2 wegen (7.9.-3) in der oberen Halbebene, n^2 und (n^2-1) wegen (7.9.-2) sogar in der offenen oberen Halbebene. Die Punkte $\gamma''=0$ werden also gar nicht berührt.

Auch bei späteren Erweiterungen für n (vgl.7.9.5.) oder γ (vgl.7.9.6.) macht $\gamma''=0$ keine Schwierigkeiten, wenn wir diese Punkte umgehen und durch einen geeigneten Schnitt dafür sorgen, daß wir auf dem "richtigen" Blatt der Riemannschen Fläche bleiben, das gemäß (7.4.-10) eindeutig definiert ist durch

$$\gamma''(\gamma:=1) = 1 \; ; \quad n\gamma''-\gamma \to 0 \quad \text{für} \quad \gamma \to +i\infty \qquad (7.9.-4)$$

7.9.3. Pole der Integranden im Endlichen

Wegen der Form der Integranden können im Endlichen höchstens für ρ_p Pole auftreten:

$$n\gamma_o + \gamma_o'' = 0 \qquad (7.9.-5)$$

da $(\gamma+n\gamma'')$ auf dem "richtigen" Blatt der Riemannschen Fläche (vgl.7.9.2.) keine Nullstellen (außer $\gamma=0$ bei $n=1$) besitzt, ρ_s also keine Pole hat.
Die Nullstelle von (7.9.-5) ist

$$\gamma_o = -1/\sqrt{n^2+1} \; ; \quad \text{es folgt} \quad \gamma_o^2 = 1/(n^2+1) \qquad (7.9.-6)$$

Nach (7.9.-2)f liegt (n^2+1) in der offenen oberen, also $1/(n^2+1)$ in der offenen unteren Halbebene. Der Pol (7.9.-5)f wird also vermieden. Das "-" in (7.9.-6) ist im allgemeinen durch (7.9.-5) in Verbindung mit (7.9.-4) definiert, für reelle n liegt γ_0 auf der negativ reellen Achse, für kleine negative Imaginärteile von n liegt γ_0 immer noch in der Nähe der negativ reellen Achse ($Re(\gamma_0)<0$): Bei der Wahl (7.9.-3) des Integrationsweges für γ wird also -in Erweiterung von (7.9.-2)- selbst für reelle oder leicht unterhalb der reellen Achse liegende n der Pol (7.9.-5)f vermieden.

7.9.4. Singularitäten im Unendlichen

Im Unendlichen können Singularitäten der Integranden nur auftreten, wenn die Exponentialfunktion divergiert; für

$$Re(ik_1\gamma d) = -Im(k_1\gamma d) < 0 \quad \text{für} \quad \gamma \to +i\infty \tag{7.9.-7}$$

werden -vgl.(7.4.-10)- offenbar die Integranden im Unendlichen regulär. Verlangen wir, (7.9.-7) verschärfend,

$$Im(k_1\gamma) > \varepsilon|\gamma| > 0 \quad \text{für} \quad |\gamma| \to \infty \tag{7.9.-8}$$

so werden überdies auch die Integrale sicher konvergent. (7.9.-8) kann als strenge Definition der Schreibweise "$\gamma\to+i\infty$" verstanden werden: wegen (7.9.-1) ist für rein positiv imaginäre γ die Forderung (7.9.-8) immer erfüllt.

7.9.5. Erweiterungen für n

Gemäß (7.9.-2) war n zunächst auf das Innere des 1. Quadranten beschränkt. Die Verzweigungspunkte $\gamma''=0$ bieten aber nach 7.9.2. auch für beliebige n keine Schwierigkeiten. Der Pol γ_0 wird nach 7.9.3. auch für n mit verschwindendem oder leicht negativem Imaginärteil vermieden, wenn γ gemäß (7.9.-3) im 1. Quadranten bleibt. Für n mit großem negativem Imaginärteil oder/und bei anderen Integrationswegen ist der Pol besonders zu untersuchen und gegebenenfalls das Residuum zu berücksichtigen. Konvergenzfragen im Unendlichen werden nach 7.9.4. durch n nicht berührt.

7.9.6. Erweiterungen für γ

Durch (7.9.-8) ist γ für hinreichend große $|\gamma|$ notwendig auf das Innere einer durch k_1 bestimmten Halbebene H_γ beschränkt. In H_γ darf der Integrationsweg für γ -etwa ausgehend vom 2.Weg der Fig.(7.3.-F)- stetig deformiert werden, solange man den Pol γ_0 von (7.9.-5)f vermeidet; überschreitet man den Pol, so ist das Residuum in γ_0 zu berücksichtigen.

7.9.7. Ein Zahlenbeispiel für den Pol

Zum Schluß wollen wir noch ein Zahlenbeispiel für den Pol γ_0 von ρ_p nach (7.9.-5)f geben.

Für Metalle ist der Realteil n_R des Brechungsindex n häufig erheblich kleiner als der Imaginärteil n_I. So ist für Silber bei 612 nm : $n_{Ag} \approx 0.1+4i$. Wir idealisieren: $n = i \cdot n_I$. Setzen wir $\gamma = i \cdot u$, so wird nach (7.4.-10) $n\gamma'' \simeq \sqrt{-u^2 - n_I^2 - 1} = i\sqrt{u^2 + n_I^2 + 1}$, wobei man aus der Limesforderung von (7.4.-10) erkennt, daß das Vorzeichen der Wurzel bei reellem u richtig gewählt wurde. Für den Pol $\gamma_0 = i \cdot u_0$ folgt mit (7.9.-5):

$$0 = n^2\gamma_0 + n\gamma_0'' = -in_I^2 u_0 + i\sqrt{u_0^2 + n_I^2 + 1}$$

und damit $u_0 = 1/\sqrt{n_I^2 - 1} \simeq 1/n_I$. Für Silber ergibt sich mit den obigen Daten $u_0 \simeq 1/4$. Eine genauere Rechnung liefert

$$\gamma_0 = -0.007 + 0.258i \quad \text{für} \quad n := 0.1+4i, \ (Ag) \qquad (7.9.-9)$$

Der Pol liegt also dicht an der imaginären Achse. Das führt zu Schwierigkeiten (großem Rechenaufwand und auch evtl. Fehlern) bei der numerischen Integration auf dem Achsenweg, dem 2.Weg von (7.3.-F), und ist mit ein Grund für die Wahl des direkten Integrationsweges 1 von Fig.(7.3.-F): vgl.7.8.

7.10. Kurze Diskussion

Die Herleitung der Ergebnisse (7.7.-6), (7.7.-9) der Telegraphie-Methode war erheblich aufwendiger als die entsprechenden Herleitungen bei den Näherungsmethoden. Die Ergebnisse selbst sind aber nicht schwieriger als die Ergebnisse (5.4.-16)ff mit (5.4.-12)f der Interferenz-Methode, da sich nach 7.9. Singularitäten leicht vermeiden lassen. Wegen der großen Freiheit in der Wahl des Integrationsweges (vgl.7.3.) ist es möglich, sich den besten auszusuchen. Die Wahl des direkten Weges (vgl.7.8.) von (7.3.-F) erwies sich als so günstig, daß der Zeitbedarf der numerischen Rechnungen für die Telegraphie-Methode geringer war als der für die Interferenz-Methode bei vergleichbarer Genauigkeit.

In der Herleitung der Telegraphie-Methode wurden einige scheinbar willkürliche, einengende Annahmen gemacht, die gerechtfertigt werden durch die Eindeutigkeit einer die Grenzbedingungen -vgl.etwa (7.2.-14)- befriedigenden Lösung, worauf wir hier jedoch nicht weiter eingehen wollen: vgl. dazu z.B. Sommerfeld /21/.

Die Telegraphie-Methode liefert exakte Ergebnisse des theoretischen Modells von 3.1. Ein Vergleich ihrer Ergebnisse mit den Experimenten prüft daher direkt das Modell; bei den Näherungs-Methoden war es nicht möglich, zwischen einem Fehler der Näherung und einem evtl. unzureichenden Modell zu unterscheiden.

Ein weiterer Erfolg der Telegraphie-Methode ist, daß aus ihren Ergebnissen die Ergebnisse der Näherungs-Methoden abgeleitet werden können: vgl.8. Damit ist es zum erstenmal möglich, Gültigkeitsbereich und Güte der Näherungs-Methoden quantitativ anzugeben.

7.11. Vergleich mit dem Experiment

Die Ergebnisse (7.7.-6), (7.7.-9) mit (3.6.-15) der exakten Telegraphie-Methode sind in (7.-F) für die verschiedenen Spiegel zusammen mit den Ergebnissen der Experimente dargestellt. Zu den Daten und Bezeichnungen vergleiche man 3.8.

Bei den Metallspiegeln stimmen die theoretischen Kurven für parallele Dipolstellung und isotrope Verteilung gut mit den Meßpunkten überein; in kleinen Abständen ($\delta<0.4$) vom Spiegel -insbesondere für Ag- erscheint die parallele Dipolstellung besser. Die senkrechte Dipolstellung kann ausgeschlossen werden (vgl.10.6.).

Die Meßergebnisse für die dielektrische Grenzfläche werden sehr gut durch die Kurven für isotrope Verteilung angeglichen. Es erscheint eindeutig, daß weder die senkrechte noch die parallele Dipolstellung zutreffen.

Wir haben uns hier - wie bei den Vergleichen der Näherungs-Methoden mit den Messungen - darauf beschränkt, das uns an den Figuren wesentlich Erscheinende zu sagen. Auf Interpretationen von Übereinstimmungen sowie Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment gehen wir erst in 10.6. nach einigen Bemerkungen zu den Vernachlässigungen des theoretischen Modells ein.

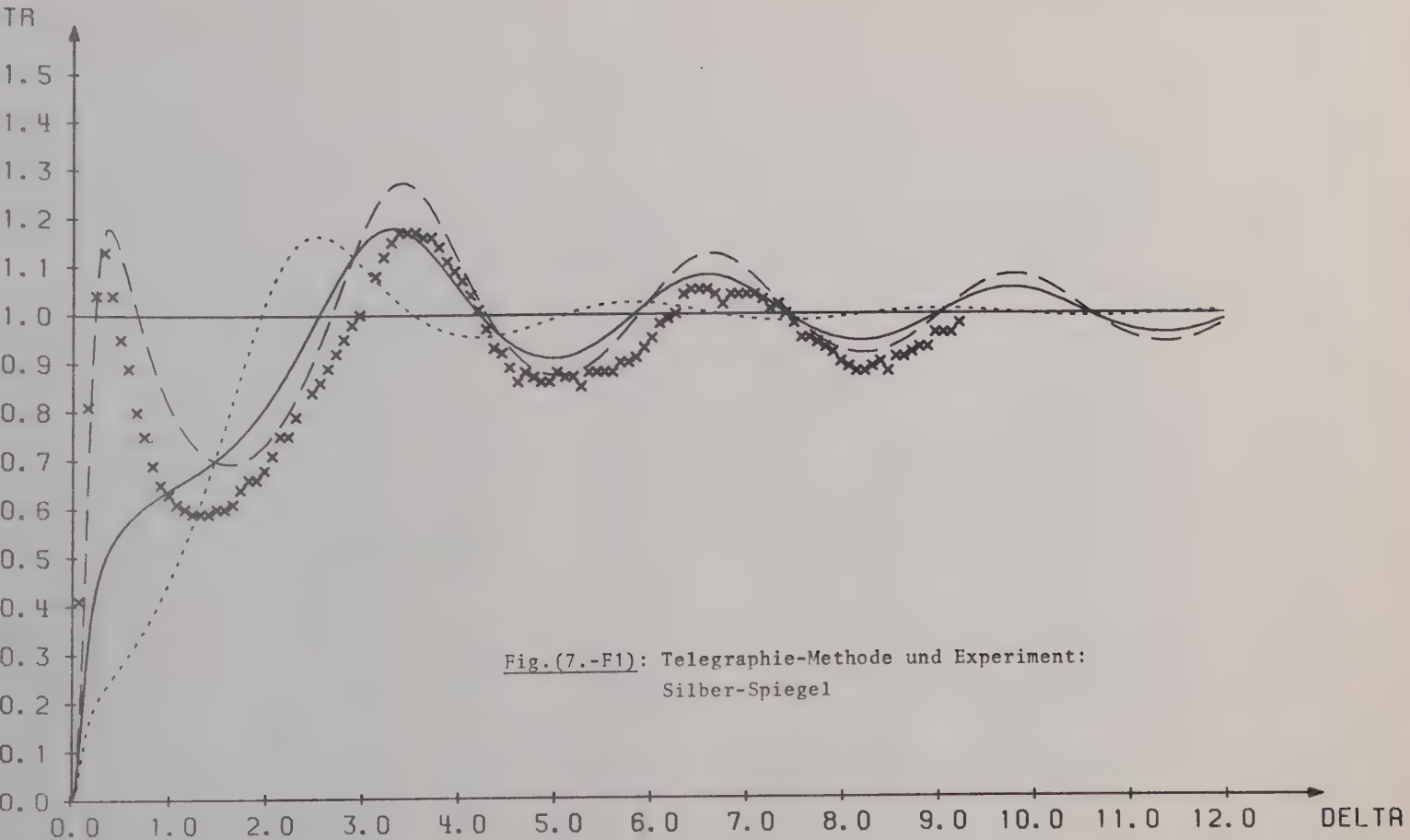


Fig.(7.-F1): Telegraphie-Methode und Experiment:
Silber-Spiegel

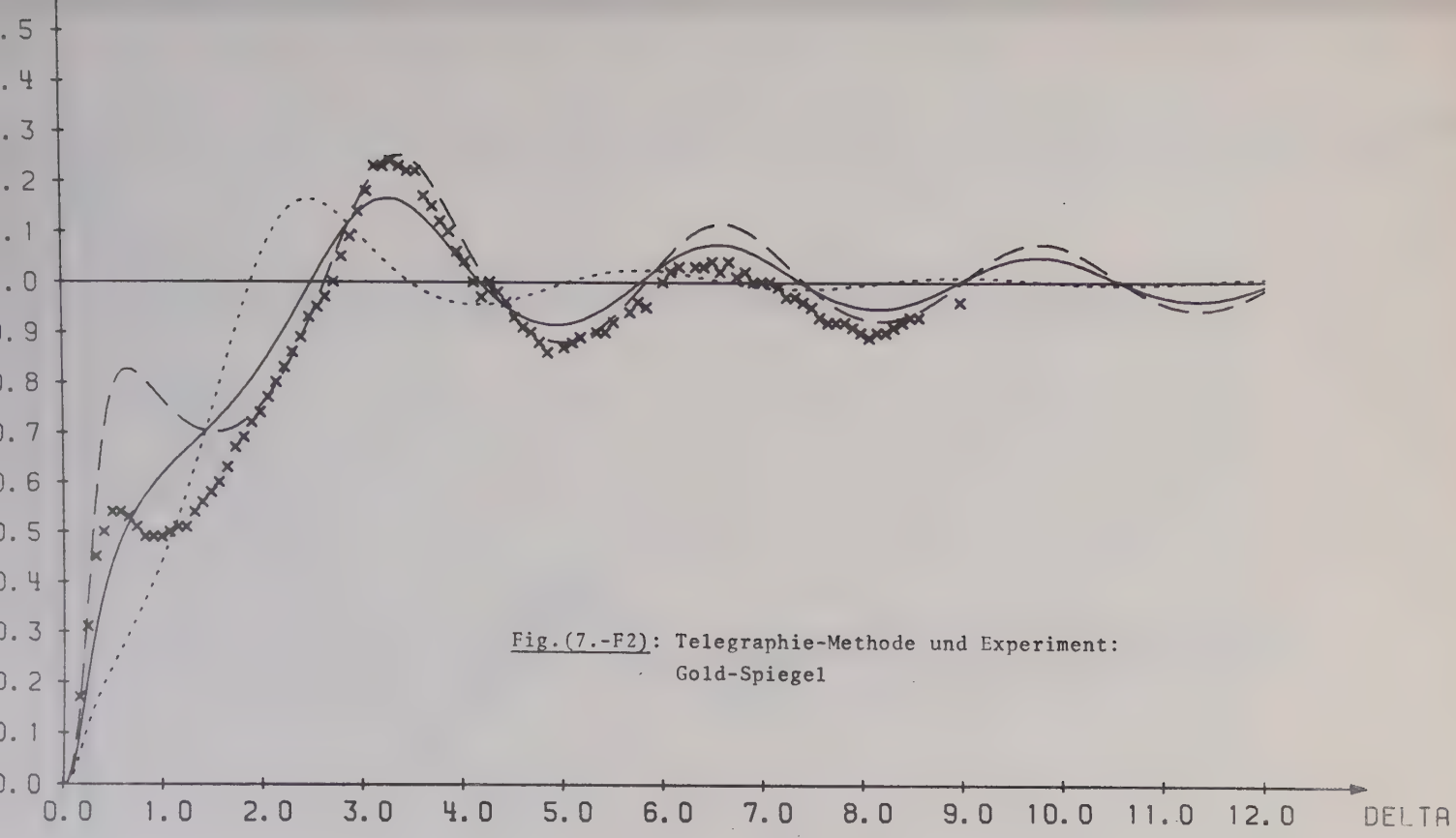


Fig.(7.-F2): Telegraphie-Methode und Experiment:
Gold-Spiegel

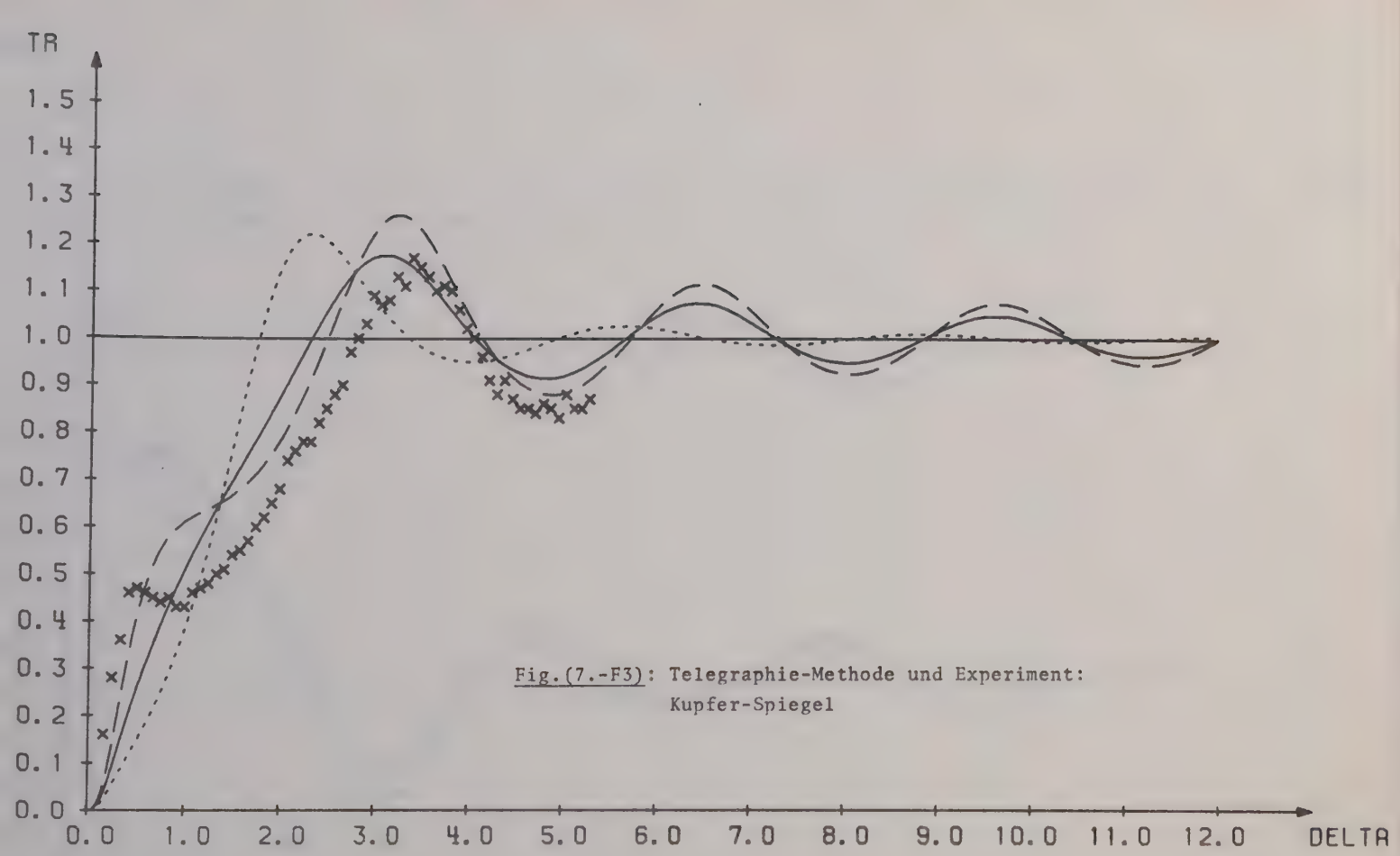


Fig.(7.-F3): Telegraphie-Methode und Experiment:
Kupfer-Spiegel

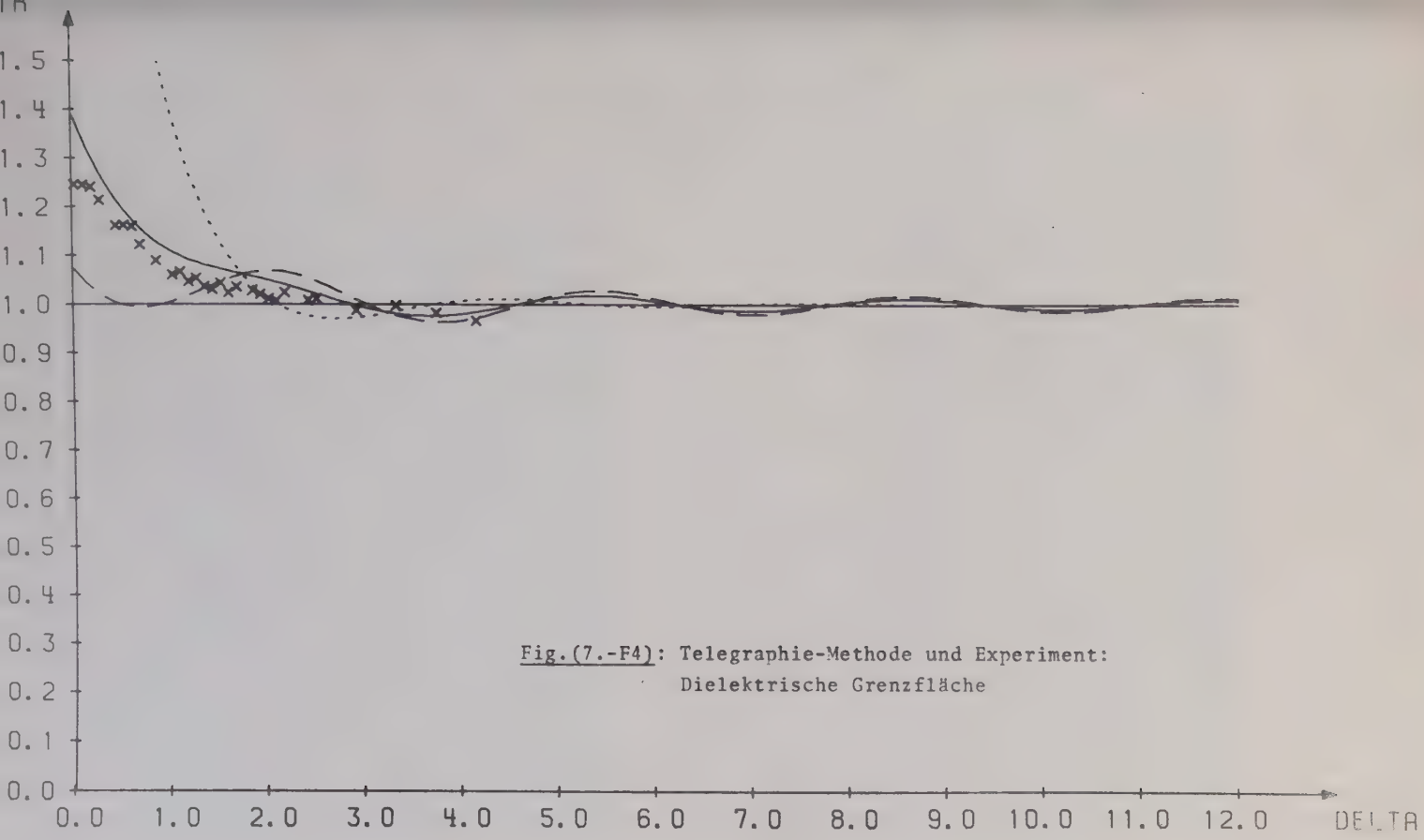


Fig.(7.-F4): Telegraphie-Methode und Experiment:
Dielektrische Grenzfläche

8. Die Näherungen der Näherungs-Methoden

8.1. Die Näherung der Reflexions-Methode

In diesem und den beiden folgenden Abschnitten sollen drei einfache Näherungen der exakten Ergebnisse - etwa aus (7.7.-6), (7.7.-9), (7.7.-13) - der Telegraphie-Methode besprochen werden, die sich als identisch mit den bereits früher in 4., 5., 6. auf völlig anderen Wegen abgeleiteten Ergebnissen der Näherungs-Methoden erweisen.

Nach (7.7.-6), (7.7.-9) ist

$$F_{\uparrow} = i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_p \; (\gamma^2-1) \qquad (8.1.-1)$$

$$F_{\rightarrow} = \frac{i}{2} \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; (\gamma^2\rho_p-\rho_s) \qquad (8.1.-2)$$

Für größere δ klingt - etwa auf dem direkten Integrationsweg von (7.3.-F) - die Exponentialfunktion im Integranden schnell ab. Genauer zeigt eine ausführliche Untersuchung der Integrale, die in 7.8. nur skizziert wurde und die in der vorliegenden Arbeit auch nicht wiedergegeben werden soll, daß es - bei unseren Brechungsindizes n (vgl.(3.8.) - für die relative Genauigkeit $\varepsilon := 10^{-3}$ ausreicht, $a>12$, also nach (7.8.-1) als obere Integrationsgrenze $og := a/2\delta > 6/\delta$ zu wählen. Schon für $\delta \geq \delta_{Min} \approx 6$ wird $og \approx 1$ und es genügt, nur die unmittelbare Umgebung des Anfangspunktes der Integration zu beachten. Für $\varepsilon := 10^{-1}$ erhält man entsprechend $\delta_{Min} \approx 3$. Schon für relativ kleine $\delta > 3$ genügt es also bei mäßiger Genauigkeit, sich auf $\gamma \approx 1$ zu beschränken.

Die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten nach (7.6.-9) ändern sich bei $\gamma=1$ nur langsam, genauer ergibt die Entwicklung um $\gamma=1$:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \frac{n-1}{n+1}\left\{1 + 2\frac{\gamma-1}{n} + \Phi[(\gamma-1)^2]\right\} \\ \rho_s &= \frac{1-n}{1-n}\left\{1 + \Phi[(\gamma-1)^2]\right\} \end{aligned} \qquad (8.1.-3)$$

ρ_p und ρ_s können also für hinreichend große δ vor die Integrale gezogen werden. Die übrigbleibende Integration ist dann leicht durchführbar:

$$\begin{aligned} F_{\uparrow} &\simeq i\,\rho_p(\gamma:=1)\int_1^{i\infty} d\gamma\, e^{2i\delta\gamma}\,(\gamma^2-1) \\ &= \rho_p(\gamma:=1)\, e^{2i\delta}\left\{-\frac{1}{2\delta}-\frac{i}{2\delta^2}+\frac{1}{4\delta^3}+\frac{1}{2\delta}\right\} \end{aligned} \qquad (8.1.-4)$$

$$\begin{aligned} F_{\rightarrow} &\simeq \frac{i}{2}\,\rho_p(\gamma:=1)\int_1^{i\infty} d\gamma\, e^{2i\delta\gamma}\,\gamma^2 \\ &\quad -\frac{i}{2}\,\rho_s(\gamma:=1)\int_1^{i\infty} d\gamma\, e^{2i\delta\gamma} \\ &= \frac{1}{2}\,\rho_p(\gamma:=1)\, e^{2i\delta}\left\{-\frac{1}{2\delta}-\frac{i}{2\delta^2}+\frac{1}{4\delta^3}\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\rho_s(\gamma:=1)\, e^{2i\delta}\left\{-\frac{1}{2\delta}\right\} \end{aligned} \qquad (8.1.-5)$$

Setzt man noch gemäß (8.1.-3)

$$R_s e^{i\delta_s} := \rho_s(\gamma:=1) = -\rho_p(\gamma:=1) = \frac{1-n}{1+n} \qquad (8.1.-6)$$

so folgt

$$F_{\uparrow} \simeq R_s e^{2i\delta+i\delta_s}\left\{-\frac{1}{4\delta^3}+\frac{i}{2\delta^2}\right\} \qquad (8.1.-7)$$

$$F_{\rightarrow} \simeq \frac{1}{2}R_s e^{2i\delta+i\delta_s}\left\{-\frac{1}{4\delta^3}+\frac{i}{2\delta^2}+\frac{1}{\delta}\right\} \qquad (8.1.-8)$$

Mit $\Delta := 2\delta$ -vgl.(4.2.-4)- erhält man schließlich für die Lebensdauern der Dipole in den Hauptlagen nach (3.6.-15)

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\downarrow}} = 1+\frac{3}{2}q_\infty Im F_s = 1+3q_\infty R_s\{-\frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta^3}+\frac{\cos(\Delta+\delta_s)}{\Delta^2}\} \qquad (8.1.-9)$$

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\rightarrow}} = 1+\frac{3}{2}q_\infty Im F_p = 1+\frac{3}{2}q_\infty R_s\{-\frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta^3}+\frac{\cos(\Delta+\delta_s)}{\Delta^2}+\frac{\sin(\Delta+\delta_s)}{\Delta}\} \qquad (8.1.-10)$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Reflexions-Methode nach (4.3.-2)f.

Die Ergebnisse der Reflexions-Methode erweisen sich als gute Näherungen der exakten Telegraphie-Methode für hinreichend große Abstände δ vom Spiegel, wobei für mäßige Genauigkeit $\varepsilon \approx 10^{-1}$ schon $\delta \geq 3$ als hinreichend groß zu betrachten ist.

Für kleine δ wurde nichts über die Güte der Reflexions-Methode ausgesagt; nach (8.1.-3) ist aber zu erwarten, daß die Näherung umso besser wird, je größer $|n|$ ist. Bei der Reflexion an Metallspiegeln ($|n| \approx 4.0$ für Ag) sollte die Übereinstimmung mit der Telegraphie-Methode also für kleine δ besser sein als bei der Reflexion an der dielektrischen Grenzfläche ($n \approx 0.66$). Diese Erwartung wird durch einen Vergleich von (4.-F) mit (7.-F) bestätigt.

8.2. Die Näherung der Interferenz-Methode

Nach 7.8. und 7.9. kann der Integrationsweg für die Integrale in $F_\uparrow$, $F_\rightarrow$ nach (7.7.-6), (7.7.-9) auf die Achsen der komplexen γ-Ebene gelegt werden: 2.Weg in (7.3.-F). Die Integrale zerfallen dabei in zwei Teile[1]

$$\int_1^{i\infty} = \int_1^0 + \int_0^{i\infty} \qquad (8.2.-1)$$

Falls nun der Beitrag der imaginären Achse zur Variation der Lebensdauern nach (3.6.-15) gegenüber dem Beitrag der reellen Achse vernachlässigt werden kann, erhält man aus (7.7.-6), (7.7.-9)

$$Im\ F_\uparrow \simeq Re \int_1^0 d\gamma\ e^{2i\delta\gamma}\ \rho_p\ (\gamma^2-1) \qquad (8.2.-2)$$

$$Im\ F_\rightarrow \simeq \frac{1}{2}\, Re \int_1^0 d\gamma\ e^{2i\delta\gamma}\ (\gamma^2\rho_p-\rho_s) \qquad (8.2.-3)$$

Setzt man noch gemäß (5.4.-6), (5.4.-11)

$$\rho_p = R_p\, e^{i\delta_p}\ ; \quad \rho_s = R_s\, e^{i\delta_s}\ ; \quad \Delta := 2\delta \qquad (8.2.-4)$$

so wird nach (3.6.-15)

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^\uparrow} = 1 + \frac{3}{2} q_\infty\, Im F_\uparrow$$

$$\simeq 1 + \frac{3}{2} q_\infty \int_0^1 d\gamma (1-\gamma^2) R_p \cos(\Delta\gamma+\delta_p) \qquad (8.2.-5)$$

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_d^\rightarrow} = 1 + \frac{3}{2} q_\infty\, Im F_\rightarrow$$

$$\simeq 1 + \frac{3}{4} q_\infty \int_0^1 d\gamma \{R_s \cos(\Delta\gamma+\delta_s) - \gamma^2 R_p \cos(\Delta\gamma+\delta_p)\} \qquad (8.2.-6)$$

---

[1] Die Zerlegung (8.2.-1) wurde in 7.3.4. interpretiert.

Das sind gerade die Ergebnisse der Interferenz-Methode nach (5.4.-12)f, (5.4.-16)f.

Die Ergebnisse der Interferenz-Methode erhält man also aus der Telegraphie-Methode, wenn man für γ den Achsenweg von (7.3.-F) wählt und den Beitrag der imaginären Achse vernachlässigt. Es ist lohnend, den vernachlässigten Teil genauer zu untersuchen.

Wir setzen auf der imaginären Achse

$$\gamma = i \cdot u \; ; \qquad u \text{ reell} \tag{8.2.-7}$$

Dann werden die vernachlässigten Anteile nach (7.7.-6), (7.7.-9) :

$$\begin{aligned} G_{\uparrow} &= \operatorname{Im} i \int_0^{i\infty} d\gamma \, e^{2i\delta\gamma} \, \rho_p \, (\gamma^2-1) \\ &= \int_0^{\infty} du \, e^{-2\delta u} \, (u^2+1) \, \operatorname{Im}\rho_p \end{aligned} \tag{8.2.-8}$$

$$\begin{aligned} G_{\rightarrow} &= \tfrac{1}{2} \operatorname{Im} i \int_0^{i\infty} d\gamma \, e^{2i\delta\gamma} \, (\gamma^2\rho_p - \rho_s) \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} du \, e^{-2\delta u} \, (u^2 \operatorname{Im}\rho_p + \operatorname{Im}\rho_s) \end{aligned} \tag{8.2.-9}$$

Im allgemeinen läßt sich die Güte der Interferenz-Methode, also nach (8.2.-2)f, (8.2.-8)f die Größe von

$$G_{\uparrow} \; / \; \operatorname{Im} F_{\uparrow} \qquad \text{bzw.} \qquad G_{\rightarrow} \; / \; \operatorname{Im} F_{\rightarrow}$$

schwer abschätzen. Die vernachlässigten Anteile verschwinden aber trivial, wenn die Reflexions-

koeffizienten auf der imaginären Achse reell sind. Nun ist nach (7.6.-9) mit (8.2.-7), (7.4.-10)

$$\rho_p = \frac{n^2u - \sqrt{u^2-n^2+1}}{n^2u + \sqrt{u^2-n^2+1}}$$

$$\rho_s = \frac{u - \sqrt{u^2-n^2+1}}{u + \sqrt{u^2-n^2+1}} \qquad (8.2.-10)$$

Offenbar sind also ρ_p, ρ_s für imaginäre γ reell

1.) bei der Reflexion am dünneren dielektrischen Medium:

$$n < 1 \; ; \qquad n \text{ reell} \qquad (8.2.-11)$$

2.) bei der Reflexion am idealen Spiegel:

$$n \to \infty \; ; \quad \text{es folgt:} \quad \rho_p = -\rho_s = 1 \qquad (8.2.-12)$$

Die Interferenz-Methode liefert also in den zwei wichtigen Spezialfällen der Reflexion an einer rein dielektrischen Grenzfläche zum dünneren Medium und der Reflexion am idealen Spiegel völlig exakte Ergebnisse, dagegen läßt sich ihre Güte im allgemeinen nicht einfach abschätzen.

8.3. Die Näherung der Polarisations-Methode

In den beiden vorangegangenen Näherungen wurden die Integrale genähert, jetzt wollen wir die Integranden nähern.

Sei

$$\xi := n^2-1 \; ; \qquad |\xi| << 1 \tag{8.3.-1}$$

Wir betrachten also zwei optisch ähnliche Medien. Nun entwickeln wir die Reflexions-Koeffizienten aus (7.6.-9) nach ξ und brechen hinter dem linearen - dem ersten nicht verschwindenden - Glied ab:

$$\rho_p = \frac{n^2\gamma - \sqrt{\gamma^2+n^2-1}}{n^2\gamma + \sqrt{\gamma^2+n^2-1}} \approx \frac{\xi+1-\sqrt{1+\xi/\gamma^2}}{2} \approx \frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{4\gamma^2} \tag{8.3.-2}$$

$$\rho_s = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2+n^2-1}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2+n^2-1}} \approx \frac{1 - \sqrt{1+\xi/\gamma^2}}{2} \approx - \frac{\xi}{4\gamma^2} \tag{8.3.-3}$$

Nach (7.7.-6), (7.7.-9) wird damit

$$\begin{aligned} F_{\uparrow} &= i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; \rho_p \; (\gamma^2-1) \\ &\approx i \; \xi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; (\frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\gamma^2}) \end{aligned} \tag{8.3.-4}$$

$$\begin{aligned} F_{\rightarrow} &= i \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; (\gamma^2\rho_p - \rho_s) \\ &\approx i \; \xi \int_1^{i\infty} d\gamma \; e^{2i\delta\gamma} \; (\frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\gamma^2}) \end{aligned} \tag{8.3.-5}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$I_1 := \int_1^{i\infty} d\gamma \; \frac{e^{2i\delta\gamma}}{\gamma} = \int_{\delta}^{i\infty} \frac{d\delta\gamma}{\delta\gamma} \; e^{2i\delta\gamma} = \int_{\delta}^{i\infty} \frac{d\rho}{\rho} \; e^{2i\rho} = \int_{\delta}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \; e^{2i\rho} \tag{8.3.-6}$$

was offensichtlich mit der Definition von I_1 bei der Polarisations-Methode nach (6.7.-3) übereinstimmt. Da I_1 auch auf der reellen Achse konvergiert, darf $i\infty \to \infty$ gesetzt werden. Der Pol bei $\rho=0$ darf nicht berührt oder umgangen werden, die Integration ist also etwa längs der positiv reellen Achse auszuführen. Damit erhält man nach kleiner Zwischenrechnung

$$F_{\uparrow} \simeq \frac{\xi}{4}\{-2\delta I_1 + e^{2i\delta}(\frac{1}{2\delta^3}-\frac{i}{\delta^2}+\frac{1}{2\delta}+i)\} =: \frac{\xi}{4}h_{\uparrow}(\delta) \quad (8.3.-7)$$

$$F_{\rightarrow} \simeq \frac{\xi}{4}\{-\delta I_1 + e^{2i\delta}(\frac{1}{4\delta^3}-\frac{i}{2\delta^2}-\frac{1}{4\delta}+\frac{i}{2})\} =: \frac{\xi}{4}h_{\rightarrow}(\delta) \quad (8.3.-8)$$

Die hier definierten Funktionen $h(\delta)$ stimmen offenbar mit den Ergebnissen der Polarisations-Methode nach (6.3.-17)f überein. Die Polarisations-Methode erweist sich somit als 1.Näherung der Telegraphie-Methode bei der Entwicklung nach $\xi:=n^2-1$ für optisch ähnliche Medien.

Gleichzeitig gewinnen wir durch Vergleich von (6.3.-17)f mit (8.3.-6)f einen im Rahmen dieser Näherung konsistenten Ausdruck für die Polarisierbarkeit α :

$$\alpha = \varepsilon_1\varepsilon_0\xi = \varepsilon_1\varepsilon_0(n^2-1) = \varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1) \quad (8.3.-9)$$

Die Polarisierbarkeit $\alpha=3\varepsilon_1\varepsilon_0(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)$ aus (6.4.-1) stimmt für "verdünnte Gase" ($\varepsilon=1$) offenbar mit (8.3.-8) überein. Das ist einerseits mit der Berechtigung der hier betrachteten Näherung und andererseits mit der Vernachlässigung der Wechselwirkung im polarisierbaren Halbraum H2 gemäß der Polarisations-Methode konsistent.

8.4. Vergleich der drei Näherungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden drei sehr verschiedene Näherungen der Telegraphie-Methode betrachtet.

Die Ergebnisse der Reflexions-Methode erweisen sich als Näherung der Ergebnisse der Telegraphie-Methode für große Abstände δ vom Spiegel, wobei für die relative Genauigkeit $\varepsilon \approx 10^{-3}$ ($\varepsilon \approx 10^{-1}$) schon $\delta \geq 6$ ($\delta \geq 3$) als hinreichend groß zu betrachten ist. Vorteilhaft an der Reflexions-Methode ist außer dem geringen Rechenaufwand und der einfachen Form ihrer Ergebnisse besonders die Übersichtlichkeit ihrer Näherung.

Die Ergebnisse der Interferenz-Methode ließen sich nur mathematisch als Vernachlässigung des Beitrags der positiv imaginären Achse deuten. Bei der Reflexion am idealen Spiegel und bei der Reflexion am optisch dünneren Dielektrikum liefert die Interferenz-Methode völlig exakte Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Polarisations-Methode erwiesen sich als Näherung der Ergebnisse der Telegraphie-Methode für optisch ähnliche Medien.

9. Noch einmal: Der ideale Spiegel

Bereits in 3.7. wurden reflektiertes Eigenfeld und Variation der Lebensdauern für den idealen Spiegel hergeleitet. Als reflektiertes Eigenfeld wurde das Feld des nach der Spiegelungs-Methode der Elektrostatik angesetzten Spiegel-Dipols genommen: vgl. (3.7.-F). Wir wollen hier die Ergebnisse von 3.7. mit den Ergebnissen der theoretischen für $n \to \infty$ vergleichen.

Die Reflexions-Methode wurde gemäß 4.3. gerade so aufgestellt, daß ihre Ergebnisse für den Grenzfall des idealen Spiegels mit den Ergebnissen von 3.7. übereinstimmen. Für den idealen Spiegel ist also die Reflexions-Methode trivial exakt.

Die Telegraphie-Methode läßt sich nach 8.1. für hinreichend große δ durch die Reflexions-Methode annähern. Die Forderung $\delta \gg 1$ wurde benötigt, um die Fresnelschen Reflexions-Koeffizienten ρ_p, ρ_s mit ihrem Wert für $\gamma=1$ hinreichend gut vor die Integrale ziehen zu können. Für den idealen Spiegel ist nun -vgl.etwa (8.2.-12)- $\rho_p=-\rho_s=1$ unabhängig von γ. ρ_p und ρ_s können dann also immer mit ihrem Wert für $\gamma=1$ vor die Integrale gezogen werden. Für den Grenzfall des idealen Spiegels gehen damit die Ergebnisse der Telegraphie-Methode unabhängig von δ in die Ergebnisse der Reflexions-Methode und damit in die Ergebnisse von 3.7. über.

Auf andere Weise hatten wir schon in 7.6.2. die Übereinstimmung der Ergebnisse der Telegraphie-Methode für den idealen Spiegel mit 3.7. gezeigt.

Die Ergebnisse der Interferenz-Methode werden nach 8.2. für den idealen Spiegel exakt, gehen dann also in die Ergebnisse von 3.7. über.

Die Polarisations-Methode wurde als Näherung für optisch ähnliche Medien konzipiert. Es ist also nicht zu erwarten, daß ihre Ergebnisse für den idealen Spiegel richtig sind. In der Tat stimmen (8.3.-7)f mit (8.1.-7)f für den idealen Spiegel nicht überein.

Es ist noch interessant, die Ergebnisse von 3.7. für kleine $\Delta=2\delta$ zu untersuchen. Nach (3.7.-3)f wird

$$\begin{aligned} \frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\uparrow}} &\to 1 + q_\infty \ ; \\ \frac{\tau_\infty}{\tau_d^{\rightarrow}} &\to 1 - q_\infty \ ; \end{aligned} \qquad \text{für} \quad \Delta \to 0 \qquad (9.-1)$$

Ist insbesondere $q_\infty=1$, so wird

$$\begin{aligned} \tau_d^{\uparrow} &\to \tau_\infty / 2 \\ \tau_d^{\rightarrow} &\to \infty \end{aligned} \qquad \Delta \to 0 \qquad (9.-2)$$

was sich mit den Vorstellungen der Interferenz-Methode sehr einfach verstehen läßt: vgl.(3.7.-F).

III. SCHLUSS

10. Diskussion des theoretischen Modells

10.1 Zum Vorzug der exakten Methode

In den Abschnitten 4., 4. und 6. wurden drei Näherungs-Methoden, in 7. die im Rahmen des Modells von 3.1. exakte Telegraphie-Methode zur Bestimmung der Variation der Lebensdauern dargestellt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

Die Ergebnisse der Näherungs-Methoden stimmten mit den Messungen häufig gut und kaum schlechter als die Ergebnisse der Telegraphie-Methode überein: Reflexions-Methode für Metallspiegel, Interferenz-Methode für die dielektrische Grenzfläche (sogar exakt: vgl.8.2.) sowie bei hinreichend großen $\delta>4$ auch für Metallspiegel, Polarisations-Methode für die dielektrische Grenzfläche.

Es traten aber auch große Diskrepanzen zwischen den Ergebnissen der Näherungen einerseits und den Ergebnissen der Telegraphie-Methode sowie der Experimente andererseits auf: Reflexions-Methode für den dielektrischen Spiegel, Interferenz-Methode für die Metallspiegel bei kleinen Abständen $\delta\leq 2$, Polarisa-

tions-Methode für die Metallspiegel. Auch die Ergebnisse der Telegraphie-Methode weichen teilweise deutlich von den Messungen ab.

Die Näherungs-Methoden gaben ihre Güte selbst nicht an, ja definierten nicht einmal ihre Grenzen exakt. Bei Unterschieden zwischen den Ergebnissen der Näherungen und den Experimenten konnte also nicht zwischen einem Fehler der Näherung und einem unzureichenden Modell unterschieden werden. Der entscheidende Vorzug der im Rahmen des Modells von 3.1. exakten Telegraphie-Methode liegt, wie bei jeder exakten und exakt lösbaren Methode, in der Gewißheit, daß Abweichungen zwischen den theoretischen und experimentellen Ergebnissen im Modell begründet sind.

Der Vergleich der Ergebnisse von Telegraphie-Methode und Experiment in (7.-F) zeigt also, daß unser einfaches Modell von 3.1. weitgehend gut ist, in Details aber noch verbessert werden sollte. Wir wollen in 10.2. bis 10.5. einige offensichtliche Vernachlässigungen des Modells zusammenstellen und kurz diskutieren.

Nach einer kurzen Interpretation der Vergleiche in 10.6. geben wir in 10.7. zwei Möglichkeiten zur Verbesserung der Übereinstimmung von Theorie und Experiment an.

10.2. Zur zweiten Grenzfläche

Das Modell von 3.1. berücksichtigt nur eine einzige Grenzfläche. Die experimentellen Anordnungen haben nach 2.1. aber noch andere Grenzflächen: die Schichtsysteme für die Metallspiegel nach (2.1.-3) insbesondere die Grenzfläche Eu/Luft, die Schichtsysteme für die dielektrischen Messungen nach (2.1.-2) insbesondere die Grenzfläche C_{20}/TPT.

Eine Erweiterung der Telegraphie-Methode auf Systeme mit mehreren Grenzflächen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Wir wollen uns daher hier darauf beschränken, den Einfluß der zweiten Grenzfläche abzuschätzen.

In erster Näherung vernachlässigen wir die "Vielfachreflexionen". Dann können wir den Beitrag der zweiten Grenzfläche zum reflektierten Eigenfeld einfach addieren. Berücksichtigt man die Änderung von τ_∞, so erkennt man, daß effektiv die Amplitude der reflektierten Eigenfelder für die Metallspiegel vergrößert, für die dielektrische Grenzfläche verkleinert wird. Damit wird die Übereinstimmung der Ergebnisse der Telegraphie-Methode für isotrope Verteilung mit den Messungen in beiden Fällen verbessert.

10.3. Zur Anisotropie von H1

Untersuchungen von Fleck zur Weitwinkelinterferenz, /9/, deuten auf eine starke Anisotropie von C_{20} : Für den ordentlichen Strahl wird als Brechungsindex n_o=1.522, für den außerordentlichen n_{ao}=1.59 angegeben, vgl./9/,S.64f. In dem Modell von 3.1. wurde der den Dipol umgebende Halbraum H1 dagegen als isotrop angenommen.

Die exakte Berücksichtigung der Anisotropie in einer modifizierten Telegraphie-Methode dürfte nicht ganz einfach sein. Nimmt man an, daß die Ergebnisse für anisotrope Medien (n_o, n_{ao}) zwischen den Ergebnissen für isotrope Medien mit den Brechungsindizes $n_1=n_o$ bzw. $n_1=n_{ao}$ liegen, so kann man die Anisotropie zunächst vernachlässigen: Die Variation der Lebensdauern hängt nicht sehr empfindlich vom Brechungsindex ab, vgl.10.5.

10.4. Zu den Nachbar-Dipolen

Im Modell von 3.1. wurde nur ein einziger Dipol über der Grenzfläche betrachtet. In den Eu-Mischschichten nach 2.1. ist aber der mittlere Abstand der Eu-Atome im allgemeinen klein gegen die Abstände d zur Grenzfläche. Der Einfluß der Wechselwirkung dieser Nachbar-Dipole auf die Variation der Lebensdauer wurde bisher weder theoretisch noch experimentell untersucht.

10.5. Zu den Brechungsindizes

Die Brechungsindizes für die Metallspiegel wurden sowohl in /6/,S.106 wie von uns der Literatur, /18/, entnommen: vgl.3.8. Sie hängen recht empfindlich von den Aufdampfbedingungen ab, vgl./18/. Beim Vergleich der Ergebnisse der Telegraphie-Methode für die verschiedenen Metallspiegel nach (7.-F) sieht man, daß die Lebensdauer für größere Abstände vom Spiegel ($\delta>3$) nicht sehr sensibel gegenüber den optischen Konstanten des Spiegels ist, nur in der Nähe des Spiegels ($\delta<1$) reagiert sie empfindlich. Um auch für kleine δ gute Übereinstimmung mit den Experimenten zu erzielen, sollte also der Brechungsindex der Spiegel unter den verwendeten Aufdampfbedingungen gut bestimmt werden.

10.6. Zur Interpretation der Vergleiche von Theorie und Experiment

Jede der theoretischen Methoden wurde im Anschluß an ihre Darstellung mit den Experimenten verglichen. Wir verzichteten dabei auf Interpretationen der Vergleiche.

Nachdem nun in 10.2.ff Vernachlässigungen des theoretischen Modells von 3.1. und in 10.5. der Einfluß möglicherweise falsch gewählter Brechungsindizes erwähnt sowie vor allem in 8. die Näherungs-Methoden aus der Telegraphie-Methode abgeleitet wurden, ist die Interpretation leichter.

Bei den Vergleichen in 4.5., 5.6., 6.6. und 7.11. der theoretischen Methoden mit den Experimenten konnte die "senkrechte Dipolstellung" fast immer ausgeschlossen werden. Eine Ausnahme bildete lediglich die Reflexions-Methode nach (4.-F4) für die dielektrische Grenzfläche bei kleinen Abständen $\delta<1.5$; hier ist aber nach 8.1. die Reflexions-Methode keine gute Näherung mehr.

Nun ist nach der experimentellen Anordnung, vgl. 2.2., auch gar keine senkrechte Dipolstellung für die Ergebnisse zu erwarten: Gemessen wurde senkrecht zu den Schichtebenen, wobei der erfaßte Raumwinkelbereich in Testmessungen auf etwa 10^{-4} verkleinert wurde. Die Emission eines senkrechrechten Dipols wäre also gar nicht beobachtet worden. Bei Veränderung des Beobachtungswinkels konnten wir keine Änderung der Lebensdauer feststellen.

Aus den Ergebnissen für die Metallspiegel nach (7.-F1)ff kann nicht eindeutig zwischen paralleler Dipolstellung und isotroper Verteilung entschieden werden, allerdings passen die Kurven für parallele Dipolstellung etwas besser, vgl. jedoch auch 10.2.

Die Messungen für die dielektrische Grenzfläche werden sehr gut durch die Kurve für isotrope Verteilung, dagegen gar nicht durch die Kurven für parallele oder senkrechte Dipolstellung angeglichen.

Es scheint also, als hätten gerade unsere Messungen an der dielektrischen Grenzfläche die Entscheidung zwischen paralleler Dipolstellung und isotroper Verteilung zugunsten der Isotropie gefällt.

Wir glauben, daß dieser Schluß für unser Schichtsystem (2.1.-2) eindeutig ist. Bei den Messungen an den Metallspiegeln wurde aber als Abstandshalter C_{20} benutzt: vgl.(2.1.-3). Es erscheint nun z. B. denkbar, daß durch C_{20} die Isotropie der Umgebung des Europiums im Komplex I nach (2.1.-1) gestört wird und dann bei der Messung die parallele Dipolstellung beobachtet wird. Falls durch die hier in 10., insbesondere in 10.7. genannten Modifikationen keine bessere Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Experimente und der (erweiterten) Telegraphie-Methode für isotrope Verteilung erzielt wird, sollten die Messungen an den Metallspiegeln - jetzt aber mit TPT als Abstandshalter - wiederholt werden.

Bei der Berechnung aller theoretischen Kurven haben wir die Quantenausbeute

$$q_\infty := 1$$

angenommen: vgl.3.8. Die Vergleiche in (7.-F) geben keinen Grund, diese Annahme zu ändern.

10.7. Zur Verbesserung der Übereinstimmung von Theorie und Experiment

Will man die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen von Experimenten und einer im Rahmen eines Modells exakten Theorie verbessern, so kann man entweder das Modell den Experimenten oder die Experimente dem Modell angleichen. Die zweite Möglichkeit ist für uns besonders deshalb relevant, weil wir zunächst keineswegs unbedingt daran interessiert sind, einen fest vorgegebenen experimentellen Aufbau korrekt zu beschreiben, sondern einen Beitrag leisten wollen zur Untersuchung molekularer Vorgänge in monomolekularen Schichtsystemen, wobei die Details des Aufbaus weitgehend offen sind.

Von den in 10. aufgezeigten Vernachlässigungen läßt sich die zweite Grenzfläche im allgemeinen nicht oder nicht einfach eliminieren; dagegen wurde schon in 10.2. erwähnt, daß eine Erweiterung der Telegraphie-Methode auf Systeme mit mehreren Grenzflächen ohne allzu großen Aufwand möglich erscheint. Hier würde man also zweckmäßigerweise das Modell modifizieren.

Bei der in 10.4. genannten Vernachlässigung der Wechselwirkung mit den Nachbar-Dipolen dürfte es zunächst sinnvoller sein, den Einfluß der Nachbar-Moleküle durch stärkere Verdünnungen herabzusetzen, obwohl dann wegen der kleineren Intensitäten bald Meßprobleme auftauchen. Hier würde man also zunächst das Experiment modifizieren.

Wir nehmen an, daß die beiden Vernachlässigungen 10.2. und 10.4. die wesentlichen Gründe für die nach (7.-F) noch gebliebenen Diskrepanzen zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen sind.

11. Zusammenfassung und Schluß

Die Lebensdauer angeregter Molekülzustände kann verändert werden, indem man in definierten Abstand zu diesen Molekülen Grenzflächen bringt, etwa Grenzflächen zu Metallen (Spiegel) oder allgemeiner zu Medien mit anderen optischen Konstanten. Diese "Variation der Lebensdauer" wurde für eine dielektrische TPT/Luft-Grenzfläche am Europium-Komplex I, vgl.(2.1.-1), experimentell untersucht. Aufbau der Proben und Meßapparatur sind in 2. beschrieben.

Zur theoretischen Beschreibung wurden im II.Teil drei kürzlich publizierte Näherungs-Methoden und eine neue, bisher unveröffentlichte, im Rahmen eines einfachen Modells (3.1.) exakte Methode dargestellt. Die Ergebnisse der Näherungs-Methoden erwiesen sich als verschiedene Näherungen der Ergebnisse der exakten Methode: vgl.8. Damit gelingt es erstmals, Grenzen und Güte der Näherungs-Methoden quantitativ zu bestimmen. Der gegenüber den Näherungs-Methoden entscheidende Vorzug der exakten Methode liegt in der Gewißheit, daß Diskrepanzen zwischen den theoretischen und experimentellen Ergebnissen im Modell begründet sind, vgl.10.1.

Die Ergebnisse der exakten Methode für vier verschiedene Spiegel stimmen mit den eigenen sowie fremden Messungen (/6/) gut überein: vgl.(7.-F); die noch gebliebenen Unterschiede erwecken den Wunsch nach einer einfachen Verbesserung des Modells sowie nach etwas modifizierten Messungen: vgl.10.7.

Zur theoretischen Beschreibung der Variation der Lebensdauern benötigt man nach (3.6.-14)f das durch die Grenzfläche induzierte "Störfeld" (reflektiertes Eigenfeld). Die exakte Methode liefert dieses Feld exakt. Nun gibt es viele Phänomene, zu deren theoretischer Untersuchung man die Beeinflussung des elektrischen Feldes emittierender Dipole durch eine ebene Grenzfläche kennen muß: Weitwinkelinterferenz, Energieübergang, Variation der Quantenausbeute, usw. Die wesentlichen Ergebnisse der exakten Methode sind daher nicht auf die Variation der Lebensdauern beschränkt.

Zum Schluß wollen wir noch auf zwei etwas tieferliegende Aspekte der Variation der Lebensdauern hinweisen.

Der Effekt der induzierten Emission von Strahlung durch Strahlung ist wohlbekannt. Die Versuchsanordnung der vorliegenden Arbeit gestattet sowohl "induzierte Emission" wie "induzierte Verhinderung der Emission" sowie Zwischenstufen in kleinen Schritten. Das wird offenbar erreicht durch die seltene Möglichkeit, die Phase des "Störfeldes" am Emitterort zu beherrschen, einfach durch Variation des Abstandes zu einem Spiegel.

Der zweite Aspekt betrifft die Wellen-Partikel-Dualität des Lichts. Es sind viele Versuche bekannt, die den Teilchencharakter des Lichts bei Emission oder Absorption demonstrieren. Es sind auch viele Versuche bekannt, die den Wellencharakter des Lichts bei seiner Ausbreitung zeigen. Die Variation der Lebensdauer zeigt den Wellencharakter des Lichts bereits bei seiner Emission.

ANHANG

A1. Zu den elektrodynamischen Potentialen

Aus den Maxwellschen Gleichungen werden in einem homogenen Medium für die elektrodynamischen Potentiale Differentialgleichungen abgeleitet.

Die Maxwellschen Gleichungen im praktischen Maßsystem (vgl.etwa Weizel, /27/,I,S.452),

$$\text{rot } \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{G} \qquad \text{(A1-1)}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \text{(A1-2)}$$

$$\text{div } \vec{D} = \eta \qquad \text{(A1-3)}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \qquad \text{(A1-4)}$$

ergänzen wir durch die "Materialgleichungen"

$$\vec{D} = \varepsilon\, \varepsilon_0\, \vec{E} \qquad \text{(A1-5)}$$

$$\vec{B} = \mu\, \mu_0\, \vec{H} \qquad \text{(A1-6)}$$

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \; ; \qquad \vec{G}_1 = \varkappa\, \vec{E} \qquad \text{(A1-7)}$$

Die Stromdichte $\vec{G}$ erscheint in (A1-7) in zwei Anteile zerlegt: Nur $\vec{G}_1$ wird durch das elektrische Feld $\vec{E}$ hervorgerufen, $\vec{G}_2$ möge andere Ursachen haben [1] .

Wir beschränken uns hier auf isotrope Medien: ε und μ sollen Skalare sein.

---

[1] Schreibt man $\vec{G}=\varkappa(\vec{E}+\vec{E}^e)$, so wird $\vec{E}^e$ die "eingeprägte" elektrische Feldstärke genannt. Man könnte entsprechend $\vec{G}_2$ die eingeprägte Stromdichte nennen.

Für homogene Medien,

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad \varkappa = \text{const}, \tag{A1-8}$$

erhält man nach Eliminierung von $\vec{D}$ und $\vec{B}$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{A1-9}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \dot{\vec{H}} \tag{A1-10}$$

$$\vec{G}_2 = \operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} - \varkappa \vec{E} \tag{A1-11}$$

$$\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0} = \operatorname{div} \vec{E} \tag{A1-12}$$

(A1-9) kann erfüllt werden durch den Ansatz

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{A1-13}$$

wodurch (A1-10) die Gestalt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} (-\mu\mu_0 \dot{\vec{A}}) \tag{A1-14}$$

annimmt. $\vec{E}$ und $(-\mu\mu_0\dot{\vec{A}})$ können sich nur durch ein wirbelfreies Feld unterscheiden, das dann als Gradient darstellbar sein muß:

$$\vec{E} = -\mu\mu_0 \dot{\vec{A}} - \operatorname{grad} V \tag{A1-15}$$

Mit (A1-13) und (A1-15) gehen (A1-11)f über in

$$\begin{aligned} -\vec{G}_2 &= -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\ddot{\vec{A}} - \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad}\dot{V} - \mu\mu_0\varkappa\dot{\vec{A}} - \varkappa \operatorname{grad} V \\ &= -\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\dot{V} + \varkappa V) + (\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\ddot{\vec{A}} - \mu\mu_0\varkappa\dot{\vec{A}}) \end{aligned} \tag{A1-16}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0} &= +\mu\mu_0 \operatorname{div}\dot{\vec{A}} + \operatorname{div}\operatorname{grad} V \\ &= \mu\mu_0 \partial_t (\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\dot{V} + \varkappa V) + (\Delta V - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\ddot{V} - \mu\mu_0\varkappa\dot{V}) \end{aligned} \tag{A1-17}$$

wobei ∂_t die partielle Differentiation nach t bedeutet.

Offenbar sind (A1-16)f erfüllt, wenn $\vec{A}$ und V den Beziehungen (A1-18)ff genügen:

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0 \dot{V} + \varkappa V \qquad \text{(A1-18)}$$

$$-\vec{G}_2 = \left(\Delta - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\partial_t\partial_t - \mu\mu_0\varkappa\partial_t \right) \vec{A} \qquad \text{(A1-19)}$$

$$-\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0} = \left(\Delta - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\partial_t\partial_t - \mu\mu_0\varkappa\partial_t \right) V \qquad \text{(A1-20)}$$

Bei der Diskussion der Lösungen von (A1-18)ff in den beiden folgenden Abschnitten beschränken wir uns auf zwei für die vorliegende Arbeit wichtige Spezialfälle.

A2. Zu den retardierten Potentialen

Wir geben Lösungen von (A1-18)ff für Dielektrika ($\varkappa=0$) an, vgl. /27/, I, S.478ff.

Für $\varkappa:=0$ gehen (A1-18)ff über in

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0 \dot{V} \tag{A2-1}$$

$$-\vec{G} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} \tag{A2-2}$$

$$-\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0} = \Delta V - \frac{1}{c^2} \ddot{V} \tag{A2-3}$$

Dabei haben wir gemäß (A1-7) $\vec{G}=\vec{G}_2$ berücksichtigt und gesetzt

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \tag{A2-4}$$

Wir zeigen im folgenden, daß

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int d\tau' \, \frac{1}{R} \, \vec{G}(\vec{r}', t-R/c) \tag{A2-5}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int d\tau' \, \frac{1}{R} \, \eta(\vec{r}', t-R/c) \tag{A2-6}$$

Lösungen von (A2-1)ff sind, wobei $R:=|\vec{r}-\vec{r}'|$ den Abstand vom Quell- zum Aufpunkt bedeutet und $d\tau'$ das Volumenelement im Quellgebiet ist. Die Integration erstreckt sich über das gesamte Quellgebiet.

Berücksichtigt man

$$\nabla \eta(\vec{r}', t-R/c) = -\frac{\dot{\eta}}{c} \vec{R}^o \tag{A2-7}$$

$$\Delta \eta(\vec{r}', t-R/c) = +\frac{\ddot{\eta}}{c^2} - \frac{2\dot{\eta}}{Rc} \tag{A2-8}$$

Offenbar sind (A1-16)f erfüllt, wenn $\vec{A}$ und V den Beziehungen (A1-18)ff genügen:

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0 \dot{V} + \varkappa V \qquad \text{(A1-18)}$$

$$-\vec{G}_2 = \left(\Delta - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\partial_t\partial_t - \mu\mu_0\varkappa\partial_t \right) \vec{A} \qquad \text{(A1-19)}$$

$$-\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0} = \left(\Delta - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\partial_t\partial_t - \mu\mu_0\varkappa\partial_t \right) V \qquad \text{(A1-20)}$$

Bei der Diskussion der Lösungen von (A1-18)ff in den beiden folgenden Abschnitten beschränken wir uns auf zwei für die vorliegende Arbeit wichtige Spezialfälle.

A2. Zu den retardierten Potentialen

Wir geben Lösungen von (A1-18)ff für Dielektrika ($\varkappa=0$) an, vgl. /27/,I,S.478ff.

Für $\varkappa:=0$ gehen (A1-18)ff über in

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0 \dot{V} \tag{A2-1}$$

$$-\vec{G} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} \tag{A2-2}$$

$$-\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0} = \Delta V - \frac{1}{c^2} \ddot{V} \tag{A2-3}$$

Dabei haben wir gemäß (A1-7) $\vec{G}=\vec{G}_2$ berücksichtigt und gesetzt

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \tag{A2-4}$$

Wir zeigen im folgenden, daß

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int d\tau' \, \frac{1}{R} \, \vec{G}(\vec{r}', t-R/c) \tag{A2-5}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int d\tau' \, \frac{1}{R} \, \eta(\vec{r}', t-R/c) \tag{A2-6}$$

Lösungen von (A2-1)ff sind, wobei $R:=|\vec{r}-\vec{r}'|$ den Abstand vom Quell- zum Aufpunkt bedeutet und $d\tau'$ das Volumenelement im Quellgebiet ist. Die Integration erstreckt sich über das gesamte Quellgebiet.

Berücksichtigt man

$$\nabla \eta(\vec{r}', t-R/c) = -\frac{\dot{\eta}}{c} \vec{R}_0 \tag{A2-7}$$

$$\Delta \eta(\vec{r}', t-R/c) = +\frac{\ddot{\eta}}{c^2} - \frac{2\dot{\eta}}{Rc} \tag{A2-8}$$

$$\Delta \frac{1}{R} n(r',t-R/c) = (\Delta\frac{1}{R})n + 2(\nabla\frac{1}{R})(\nabla n) + \frac{1}{R}\Delta n$$

$$= n\Delta\frac{1}{R} + \frac{2(-\vec{R}^o)}{R^2}\cdot\frac{(-\vec{R}^o)\dot{n}}{c} + \frac{\ddot{n}}{Rc^2} - \frac{2\dot{n}}{R^2c}$$

$$= n\Delta\frac{1}{R} + \frac{\ddot{n}}{c^2} \qquad \text{(A2-9)}$$

so erhält man mit V gemäß (A2-6)

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\ddot{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\int d\tau'\, n\, \Delta\frac{1}{R} \qquad \text{(A2-10)}$$

Für $R\neq 0$ verschwindet $\Delta\frac{1}{R}$. Man kann sich daher bei dem Integral auf eine kleine Kugel K' um den Aufpunkt beschränken, n mit seinem Wert am Aufpunkt vor das Integral ziehen und erhält nach dem allgemeinen Gaußschen Integralsatz von (A6-3) unter Berücksichtigung von $\Delta\frac{1}{R} = \Delta'\frac{1}{R}$, wobei Δ' auf die Quellpunktskoordinaten wirkt,

$$\int_{K'} d\tau'\, \Delta\frac{1}{R} = \int_{K'} d\tau'\, \Delta'\frac{1}{R} = \int_{K'} d\tau'\, \nabla'\cdot\nabla'\frac{1}{R}$$

$$= \int_{RdK'} df'\cdot\nabla'\frac{1}{R} = \int_{RdK'} d\omega\, R^2\, \vec{R}^o\cdot\frac{(-\vec{R}^o)}{R^2} = -4\pi \qquad \text{(A2-11)}$$

Mit (A2-10) folgt (A2-3). V gemäß (A2-6) ist also Lösung von (A2-3). Völlig analog zeigt man, daß $\vec{A}$ gemäß (A2-5) Lösung von (A2-2) ist. Wir verifizieren zum Schluß noch (A2-1).

Mit $\vec{A}$ und V nach (A2-5)f wird

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_o\dot{V} = \frac{1}{4\pi}\int d\tau'\,(\nabla\cdot\frac{\vec{G}}{R} + \frac{\dot{n}}{R}) \qquad \text{(A2-12)}$$

∇ wirkt auf die Aufpunktskoordinaten. ∇' wirke auf die Koordinaten der Quellpunkte, ebenso ∇_q ; bei ∇_q werde aber das Retardierungsglied (t-R/c) nicht mitdifferenziert. Dann ist

$$\nabla'\cdot\vec{G} = \nabla_q\cdot\vec{G} + \dot{\vec{G}}\cdot\nabla_q\frac{(-R)}{c} = \nabla_q\cdot\vec{G} + \dot{\vec{G}}\cdot\nabla\frac{R}{c}$$

$$= \nabla_q\cdot\vec{G} - \nabla\cdot\vec{G} \qquad \text{(A2-13)}$$

und wir erhalten

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\dot{V} = \int d\tau'\left(\frac{\nabla\cdot\vec{G}}{R} + \vec{G}\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{\dot{n}}{R}\right)$$

$$= \int d\tau'\left(\frac{\nabla_q\cdot\vec{G}}{R} - \frac{\nabla'\cdot\vec{G}}{R} + \vec{G}\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{\dot{n}}{R}\right) \qquad \text{(A2-14)}$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung,

$$\nabla_q\cdot\vec{G} + \dot{n} = 0, \qquad \text{(A2-15)}$$

die man etwa aus (A1-1), (A1-3) leicht verifiziert, erhält man unter Berücksichtigung von $\nabla\frac{1}{R} = -\nabla'\frac{1}{R}$

$$\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\dot{V} = -\int d\tau'\left(\frac{\nabla'\cdot\vec{G}}{R} + \vec{G}\cdot\nabla'\frac{1}{R}\right)$$

$$= -\int d\tau'\ \nabla'\cdot\frac{\vec{G}}{R} \qquad \text{(A2-16)}$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz von (A6-3) ist

$$\int_V d\tau'\ \nabla'\cdot\frac{\vec{G}}{R} = \int_{RdV} d\vec{f}\cdot\frac{\vec{G}}{R} \qquad \text{(A2-17)}$$

Wenn das Quellgebiet beschränkt ist und ganz im Innern von V liegt, verschwindet also das Integral von (A2-16). Es verschwindet auch noch, wenn $|\vec{G}|$ für große R stärker als 1/R verschwindet: $R\cdot|\vec{G}| \to 0$ für $R \to \infty$. Dann ist also auch (A2-1) erfüllt.

Damit ist gezeigt, daß $\bar{A}$ und V gemäß (A2-5)f Lösung von (A2-1)ff sind.

(A2-5)f ist nun keineswegs die einzige Lösung. Zwei Lösungen von (A2-1)ff können sich aber nur durch eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems

$$0 = \operatorname{div} \bar{A} + \varepsilon\varepsilon_0 V \qquad \text{(A2-18)}$$

$$\bar{0} = \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\bar{A}} \qquad \text{(A2-19)}$$

$$0 = \Delta V - \frac{1}{c^2} \ddot{V} \qquad \text{(A2-20)}$$

unterscheiden. Die allgemeine Lösung von (A2-1)ff ist also die Summe von (A2-5)f und der allgemeinen Lösung von (A2-18)ff.

Im folgenden Abschnitt werden einige Eigenschaften der periodischen Lösungen von (A2-18)ff in etwas allgemeinerem Zusammenhang ($x \neq 0$) behandelt.

A3. Zur Wellen- bzw. Telegraphen-Gleichung

In quellfreien homogenen Räumen genügen $\vec{A}$, V, $\vec{E}$, $\vec{H}$ der Wellen- bzw. Telegraphen-Gleichung. Spezialisierung auf periodische Wellen.

Verschwindet die "eingeprägte" Stromdichte $\vec{G}_2$, so können wir nach (A1-7) schreiben

$$\vec{G}_2 = \vec{0} \; ; \qquad \vec{G} = \varkappa \vec{E} \tag{A3-1}$$

Für homogene Räume folgt aus (A1-1), (A1-3)

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = (\partial_t + \frac{\varkappa}{\varepsilon\varepsilon_0}) \operatorname{div} \vec{D} = \dot{\eta} + \frac{\varkappa}{\varepsilon\varepsilon_0} \eta \tag{A3-2}$$

mit der Lösung

$$\eta = \eta_0 \, e^{-t/T} \; ; \qquad T := \varepsilon\varepsilon_0/\varkappa \tag{A3-3}$$

Eine etwa zur Zeit $t=0$ vorhandene Ladungsdichte η_0 verschwindet also mit der Zeitkonstanten $T=\varepsilon\varepsilon_0/\varkappa$. Wir beschränken uns daher im folgenden auf raumladungsfreie Räume

$$\eta = 0 \tag{A3-4}$$

Damit gehen die Gleichungen (A1-9)fff über in

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + \varkappa \vec{E} \tag{A3-5}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \mu\mu_0 \dot{\vec{H}} \tag{A3-6}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \tag{A3-7}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{A3-8}$$

Es folgt

$$\Delta \vec{E} = - \text{rot rot } \vec{E} + \text{grad div } \vec{E} = \text{rot } \mu\mu_0 \dot{\vec{H}}$$
$$= \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \ddot{\vec{E}} + \mu\mu_0 \varkappa \dot{\vec{E}} \qquad \text{(A3-9)}$$

$\vec{E}$ genügt also der Operator-Gleichung

$$\Delta + k^2 = 0 \qquad \text{(A3-10)}$$

wobei k^2 der Operator

$$k^2 := - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\partial_t\partial_t - \mu\mu_0\varkappa\partial_t \qquad \text{(A3-11)}$$

ist. Ähnlich zeigt man, daß auch $\vec{H}$ der Gleichung (A3-10) genügt. $\vec{A}$ und V erfüllen gemäß (A1-19)f ebenfalls (A3-10).

Die Operator-Gleichung (A3-10) bezeichnet man für $\varkappa \neq 0$ als Telegraphen-Gleichung, für $\varkappa = 0$ als Wellen-Gleichung.

Für periodische Wellen können wir setzen [1]

$$\partial_t = -i\omega \qquad \text{(A3-12)}$$

Damit geht k^2 gemäß (A3-11) über in

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 + i\omega\mu\mu_0\varkappa = i\omega\mu\mu_0(-i\omega\varepsilon\varepsilon_0+\varkappa) \qquad \text{(A3-13)}$$

Die Konvention (A1-18) geht über in

$$0 = \text{div } \vec{A} + (-i\omega\varepsilon\varepsilon_0+\varkappa)\, V$$
$$= \text{div } \vec{A} + \frac{k^2}{i\omega\mu\mu^2}\, V \qquad \text{(A3-14)}$$

---

[1] Die Wahl des Vorzeichens in (A3-12) und die Definition $\vec{M}=\vec{M}_0\exp(-i\omega t)$ des Dipolmoments in (3.2.-1) sind konsistent.

A4. Zum Hertzschen Vektor

Im homogenen quellfreien Raum definieren wir für periodische Wellen den "Hertzschen Vektor" $\vec{\Pi}$ durch

$$\vec{A} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\vec{\Pi}} + \varkappa \vec{\Pi} = (-i\omega\varepsilon\varepsilon_0 + \varkappa)\vec{\Pi}$$
$$= \frac{k^2}{i\omega\mu\mu_0} \vec{\Pi} \qquad \text{(A4-1)}$$

wobei k^2 durch (A3-13) gegeben ist. Für V erhält man nach (A3-14)

$$V + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0 \qquad \text{(A4-2)}$$

Auch $\vec{E}$ und $\vec{H}$ lassen sich nach (A3-13), (A3-15) einfach aus $\vec{\Pi}$ berechnen:

$$\vec{E} = -\mu\mu_0 \dot{\vec{A}} - \operatorname{grad} V$$
$$= k^2 \vec{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi} \qquad \text{(A4-3)}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$
$$= \frac{k^2}{i\omega\mu\mu_0} \operatorname{rot} \vec{\Pi} \qquad \text{(A4-4)}$$

Wir weisen darauf hin, daß die Definition (A4-1) des "Hertzschen Vektors" in der Literatur nicht einheitlich ist. In /11/ wird $A=\dot{\vec{\Pi}}/c$ gesetzt, in /23/,III wird $\vec{\Pi}$ durch $\vec{A}=\dot{\vec{\Pi}}$ eingeführt. (Man beachte, daß häufig unter $\vec{A}$ das Vektorpotential der magnetischen Induktion $\vec{B}$ verstanden wird, wir bezeichnen hier nach Weizel,/27/ das Vektorpotential des Magnetfeldes $\vec{H}$ mit $\vec{A}$!). Unsere Definition in (A4-1) entspricht für Dielektrika der in /22/. Entsprechend der unterschiedlichen Definition von $\vec{\Pi}$ sind auch die Grenzbedingungen für $\vec{\Pi}$ - vgl.(7.2.-14) - in der Literatur nicht einheitlich.

A5. Die elektrodynamischen Potentiale des Dipols

Wir bestimmen $\vec{A}$ und V nach (A2-5)f für einen Punktdipol im Ursprung des Koordinatensystems (vgl.Weizel,/27/,I,S.480ff).

Befindet sich in einem sonst ladungsfreien Raum im Ursprung des Koordinatensystems eine Ladung e, so ergibt (A2-6)

$$V_e = \frac{e(t-r/c)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \tag{A5-1}$$

Für einen Dipol mit dem Moment $\vec{M}=e\cdot d\vec{s}$ erhält man im Limes $d\vec{s} \to \vec{0}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left\{\frac{e(t-r/c)}{r} - \frac{e(t-|\vec{r}+d\vec{s}|/c)}{|\vec{r}+d\vec{s}|}\right\} \\ &\to \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\left\{e(t-r/c)\vec{r}^0\cdot d\vec{s} + \frac{1}{c}e(t-r/c)\vec{r}\cdot d\vec{s}\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\left\{\vec{r}^0\cdot\vec{M}(t-r/c) + \frac{1}{c}\vec{r}\cdot\dot{\vec{M}}(t-r/c)\right\} \end{aligned} \tag{A5-2}$$

Mit einer Veränderung des Dipolmoments ist ein Strom verbunden. Sitzt die (zeitabhängige) Ladung e auf den Flächenelementen $d\vec{f}$ im Abstand $d\vec{s}$ $(d\vec{s}\cdot d\vec{f} = ds\cdot df)$, so fließt im Volumenelement $d\tau = d\vec{f}\cdot d\vec{s}$ der Strom $\vec{G}\,d\tau$:

$$\dot{\vec{M}} = \dot{e}\,d\vec{s} = \vec{G}\cdot d\vec{f}\,d\vec{s} = \vec{G}\,d\tau \tag{A5-3}$$

Sind sonst keine Ströme vorhanden, so ergibt (A2-5)

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi r}\dot{\vec{M}}(t-r/c) \tag{A5-4}$$

Ändert sich das Dipolmoment periodisch, ist also in komplexer Schreibweise

$$\vec{M} = \vec{M}_o \, e^{-i\omega t} \tag{A5-5}$$

- vgl.(3.2.-1) - , so erhält man schließlich die elektrodynamischen Potentiale des Dipols in der Form

$$V = \frac{(\vec{r}^o \cdot \vec{M}_o)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2} (1-ikr) \, e^{i(kr-\omega t)} \tag{A5-6}$$

$$\vec{A} = \frac{-i\omega}{4\pi r} \vec{M}_o \, e^{i(kr-\omega t)} \tag{A5-7}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß nach (A3-13), (A2-4) für $\varkappa=0$ gilt

$$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\varepsilon_o \mu\mu_o} = \omega/c \tag{A5-8}$$

A6. Zu den Stetigkeitsbedingungen

Die Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld $\vec{E}$ und das Magnetfeld $\vec{H}$ an der Grenzfläche zweier Medien werden aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet. Aus den Bedingungen für die Tangentialkomponenten folgen die Bedingungen für die Normalkomponenten.

Aus den Maxwellschen Gleichungen (A1-1) bis (A1-7) erhält man für quellfreie, homogene Räume ($\vec{G}_2=\vec{0}$; $\nabla\varepsilon=\vec{0}$, $\nabla\mu=\vec{0}$, $\nabla\varkappa=\vec{0}$)

$$\text{rot } \vec{H} = (\varepsilon\varepsilon_0\partial_t+\varkappa)\,\vec{E} \qquad \text{(A6-1)}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0\partial_t\,\vec{H} \qquad \text{(A6-2)}$$

wobei ∂_t die partielle Differentiation nach t bedeutet.

Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien kann man mit Hilfe des allgemeinen Gaußschen Integralsatzes (vgl.etwa /17/, S.149)

$$\int_V d\tau\,\nabla = \int_{RdV} d\vec{f} \qquad \text{(A6-3)}$$

erhalten, wobei sich die linke Integration über ein beliebiges Volumen V, die rechte über den Rand (die Oberfläche) RdV von V erstrecken und $d\vec{f}$ nach außen zeigt.

Nach (A6-1) ist

$$0 = \text{div rot } \vec{H} = \text{div } (\varepsilon\varepsilon_0\partial_t+\varkappa)\,\vec{E} \qquad \text{(A6-4)}$$

Damit erhält man aus (A6-3) durch skalare Multiplikation mit $(\varepsilon\varepsilon_0\partial_t+\varkappa)\vec{E}$

$$0 = \int_V d\tau \; \mathrm{div}\,(\varepsilon\varepsilon_0\partial_t+\varkappa)\,\vec{E}$$

$$= \int_{RdV} d\vec{f}\cdot(\varepsilon\varepsilon_0\partial_t+\varkappa)\vec{E} \qquad \text{(A6-5)}$$

Verwendet man als Volumen V nach Fig.(A6-F) einen kleinen flachen Quader

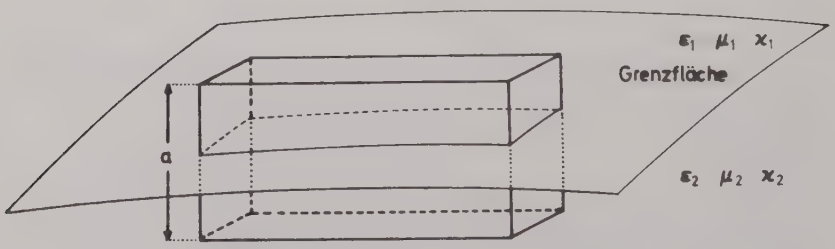


Fig.(A6-F): Das Volumen V für den Gaußschen Integralsatz

und läßt dessen Dicke a senkrecht zur Grenzfläche der beiden Medien gegen Null gehen, so verschwindet der Beitrag der Seitenflächen zum Integral der rechten Seite von (A6-5) und man erhält für die zur Grenzfläche senkrechten Komponenten Es von $\vec{E}$

$$(\varepsilon_1\varepsilon_0\partial_t+\varkappa_1)\,E_s^1 = (\varepsilon_2\varepsilon_0\partial_t+\varkappa_2)\,E_s^2 \qquad \text{(A6-6)}$$

Die Grenzbedingungen für die Normalkomponenten H_s von $\vec{H}$ erhält man völlig analog aus (A6-2)

$$\mu_1\mu_0\partial_t H_s^1 = \mu_2\mu_0\partial_t H_s^2 \qquad \text{(A6-7)}$$

bzw. bei Benutzung von (A1-4), (A1-6) direkt

$$\mu_1 H_s^1 = \mu_2 H_s^2 \qquad \text{(A6-8)}$$

Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten [1] multipliziert man (A6-3) vektoriell mit $\vec{E}$ und erhält

$$\int_V d\tau \; \mathrm{rot}\,\vec{E} = \int_{RdV} d\vec{f}\cdot\vec{E} \qquad \text{(A6-9)}$$

Wählt man V wie in Fig.(A6-F), so verschwindet bei beschränktem rot $\vec{E}$ (also nach (A1-2) bei beschränktem $\vec{B}$) für $a \to 0$ sowohl die linke Seite von (A6-9) wie der Beitrag der Seitenflächen von V zum Integral der rechten Seite und man erhält für die Tangentialkomponenten E_t von $\vec{E}$

$$E_t^1 = E_t^2 \qquad \text{(A6-10)}$$

Ganz analog findet man durch vektorielle Multiplikation mit $\vec{H}$ bei beschränktem rot $\vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{G}$ nach (A1-1) die Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten H_t von $\vec{H}$

$$H_t^1 = H_t^2 \qquad \text{(A6-11)}$$

---

[1] Die Bedingungen (A6-10)f lassen sich auch einfach mit dem zweidimensionalen Stokesschen Integralsatz ableiten.

Wir fassen zusammen: Die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ durchsetzen nach (A6-10)f die Grenzfläche stetig und für die Normalkomponenten gelten die Gleichungen (A6-6)ff.

Nun sind die Stetigkeitsbedingungen nicht unabhängig, sondern (A6-6)f lassen sich aus (A6-10) ableiten, wenn man die Gültigkeit von (A6-1)f im Innern der beiden Medien benutzt.

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit beschränken wir uns beim Beweis auf eine ebene Grenzfläche, in die wir die x,y-Ebene eines carthesischen Koordinatensystems (x,y,z) legen. Die Bedingungen (A6-6)f, (A6-10)f verlangen jetzt identisch in x,y

$$(\varepsilon_1\varepsilon_0\partial_t+\varkappa_1)\,E_z^1 = (\varepsilon_2\varepsilon_0\partial_t+\varkappa_2)\,E_z^2 \qquad \text{(A6-12)}$$

$$\mu_1\partial_t\,H_z^1 = \mu_1\partial_t\,H_z^2 \qquad \text{(A6-13)}$$

$$\begin{aligned} E_x^1 &= E_x^2 \\ E_y^1 &= E_y^2 \end{aligned} \qquad \text{(A6-14)}$$

$$\begin{aligned} H_x^1 &= H_x^2 \\ H_y^1 &= H_y^2 \end{aligned} \qquad \text{(A6-15)}$$

Wir haben (A6-12)f aus (A6-14)f herzuleiten.

Da (A6-15) identisch in x,y gilt, folgt

$$\begin{aligned} \partial_y\,H_x^1 &= \partial_y\,H_x^2 \\ \partial_x\,H_y^1 &= \partial_x\,H_y^2 \end{aligned} \qquad \text{(A6-16)}$$

wobei ∂_ξ die partielle Differentiation nach ξ bedeutet.

Nun ist die z-Komponente von (A6-1)

$$\partial_x H_y - \partial_y H_x = (\varepsilon\varepsilon_0 \partial_t + \varkappa) E_z \qquad \text{(A6-17)}$$

Nach (A6-16) ist die linke Seite an der Grenzfläche stetig, damit wird auch die rechte Seite stetig und man erhält (A6-12). Ebenso folgert man (A6-13) aus (A6-14) und der z-Komponente von (A6-2).

Man kann also auf die Stetigkeitsbedingungen (A6-6)f für die Normalkomponenten verzichten und sich auf die Bedingungen (A6-10)f für die Tangentialkomponenten beschränken, wenn die Maxwellschen Gleichungen im Innern der beiden Medien erfüllt sind.

Damit wir uns in (7.2.-12) auf die Stetigkeit der Tangentialkomponenten beschränken können, verifizieren wir (A6-1)f für $\tilde{E}$ und $\tilde{H}$ gemäß (7.2.-2)f.

Aus (7.4.-2) und den Ansätzen (7.4.-3)f erkennt man mit (7.4.-5) leicht, daß Z, Z_ν', Z_ν'' die Operatorgleichung (A3-10)

$$(\Delta + k^2) = 0 \qquad \text{(A6-18)}$$

erfüllen mit $k=k_1$ für Z, Z_ν', also $z>0$ und $k=k_2$ für Z_ν'', also $z<0$; bzgl. k vgl.(7.2.-4). Nach (7.4.-1) gilt dann (A6-18) auch für $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}'$, $\tilde{Z}''$, nach (7.2.-9) für $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ und nach (7.2.-7) endlich für die entsprechenden Hertzschen Vektoren $\tilde{\pi}$. Mit k^2 gemäß (7.2.-4) folgt damit aus (7.2.-2)f

$$\text{rot } \vec{H} - (\varepsilon\varepsilon_o\partial_t+\varkappa)\,\vec{E} =$$

$$= \frac{k^2}{i\omega\mu\mu_o} \text{ rot rot } \vec{\Pi} - (\varepsilon\varepsilon_o\partial_t+\varkappa)\,(k^2\vec{\Pi} + \text{grad div } \vec{\Pi})$$

$$= \frac{k^2}{i\omega\mu\mu_o} \{ \text{grad div } \vec{\Pi} - \Delta\,\vec{\Pi} - k^2\,\vec{\Pi} - \text{grad div } \vec{\Pi} \}$$

$$= \vec{0} \qquad \text{(A6-19)}$$

$$\text{rot } \vec{E} + \mu\mu_o\partial_t\,\vec{H} =$$

$$= \text{rot } (\,k^2\,\vec{\Pi} + \text{grad div } \vec{\Pi}\,) \;-\; k^2 \text{ rot } \vec{\Pi}$$

$$= \vec{0} \qquad \text{(A6-20)}$$

Durch (7.4.-2) und die Ansätze (7.4.-3)f ist demnach die Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen (A6-1)f im Innern der beiden Medien gesichert. Dann sind also die Bedingungen (7.2.-12) für die Tangentialkomponenten nicht nur notwendig sondern auch hinreichend zur Bestimmung von $\vec{Z}'$ und $\vec{Z}''$.

A7. Zur isotropen Verteilung

Wir wollen auf den in der vorliegenden Arbeit häufiger aufgetretenen Begriff der "isotropen Verteilung" der Dipole etwas genauer eingehen.

Die Lebensdauer $\tau=\tau(\vartheta)$ eines Oszillators vor einem Spiegel hängt von seiner Stellung bzgl. des Spiegels ab, definiert durch die Polarwinkel ϑ,φ, vgl.Fig.(3.1.-F). Die Lebensdauer einer "isotropen Verteilung" kann man zunächst rein formal durch

$$\frac{1}{\tau^{is}} := \frac{1}{4\pi}\int d\cos\vartheta \int d\varphi \,\frac{1}{\tau(\vartheta)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\cos\vartheta}{\tau(\vartheta)} \qquad (A7\text{-}1)$$

definiert ansehen. Eine physikalische Deutung von τ^{is} gemäß (A7-1) ist nicht trivial. Wir betrachten zwei Fälle.

In einem Gemisch von unabhängigen Dipolen mit unterschiedlicher, aber jeweils fester Stellung strahle jeder Dipol nach einem Exponentialgesetz: $I_D(t) = I_o\cdot\exp(-t/\tau(\vartheta))$, wobei auch $I_o = I_o(\vartheta,\varphi)$ noch von der Stellung des Dipols abhängen kann. Allgemein gilt:

Sei $W_D(\cos\vartheta,\varphi)\, d\cos\vartheta\, d\varphi$ die Wahrscheinlichkeit für die Stellung des Dipols im Raumwinkelelement $d\cos\vartheta d\varphi$ um ϑ,φ. Der Energiestrom zur Zeit t ist $I_D(t) = I_o(\vartheta,\varphi)\cdot\exp(-t/\tau(\vartheta))$. Davon wird der Bruchteil $W_E(\cos\vartheta,\varphi;\cos\Theta,\Phi)\, d\cos\Theta\, d\Phi$ in das Raumwinkelelement $d\cos\Theta\, d\Phi$ um Θ,Φ gestrahlt und mit der Wahrscheinlichkeit $W_N(\cos\Theta,\Phi)$ im Photomultiplier nachgewiesen.

Der nachgewiesene Energiestrom ist also zur Zeit t

$$I(t) = \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_{0}^{2\pi} d\varphi \; W_D(\cos\vartheta,\varphi) \; I_o(\vartheta,\varphi) \; e^{-t/\tau(\vartheta)} \cdot \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_{0}^{2\pi} d\phi \; W_E(\cos\vartheta,\varphi;\cos\theta,\phi) \; W_N(\cos\theta,\phi) \quad \text{(A7-2)}$$

wobei jeweils über die vollen Winkelbereiche zu integrieren ist. Mit einigen durchsichtigen Annahmen läßt sich (A7-2) stark vereinfachen.

Gemessen werde in einem kleinen Raumwinkelbereich $\Delta\Omega_N$ um $\theta := 0$ senkrecht zu den Schichtebenen. In $\Delta\Omega_N$ sei $W_N := 1$. Dann ist

$$\int\int d\cos\theta \; d\phi \; W_E(\cos\vartheta,\varphi;\cos\theta,\phi) \; W_N(\cos\theta,\phi) = \Delta\Omega_N \; W_E(\cos\vartheta,\varphi;1,0) \quad \text{(A7-3)}$$

Das Europium wird durch Energieübergang von den auch in den Schichten (vgl. jedoch 10.6.) weitgehend würfelsymmetrischen Liganden angeregt. I_o ist also weitgehend von der Dipolstellung unabhängig:

$$I_o(\vartheta,\varphi) := I_o := \text{const.} \quad \text{(A7-4)}$$

Weiter gilt für Dipolstrahlung

$$W_E(\cos\vartheta,\varphi;1,0) := \frac{3}{8\pi} \sin^2\vartheta \quad \text{(A7-5)}$$

Mit (A7-3)ff ergibt sich aus (A7-2)

$$I(t) = \frac{3}{8\pi} \Delta\Omega_N \; I_o \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_{0}^{2\pi} d\varphi \; W_D(\cos\vartheta,\varphi) \cdot e^{-t/\tau(\vartheta)} \sin^2\vartheta \quad \text{(A7-6)}$$

Sind noch die Dipolstellungen gleichwahrscheinlich,

$$W_D(\cos\vartheta,\varphi) := 1 / 4\pi \tag{A7-7}$$

so folgt

$$I(t) = \frac{3}{16\pi}\,\Delta\Omega_N\, I_o \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta\, \sin^2\vartheta\, e^{-t/\tau(\vartheta)} \tag{A7-8}$$

Bei den theoretischen Methoden ergibt sich

$$\frac{1}{\tau(\vartheta)} = \frac{1}{\tau^{\perp}} \sin^2\vartheta + \frac{1}{\tau^{\parallel}} \cos^2\vartheta \tag{A7-9}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \gamma &:= \cos\vartheta \\ \alpha &:= t\,\left(\frac{1}{\tau^{\parallel}} - \frac{1}{\tau^{\perp}}\right) \end{aligned} \tag{A7-10}$$

folgt aus (A7-8)

$$I(t) = \frac{3}{8\pi}\,\Delta\Omega_N\, I_o\, e^{-t/\tau^{\perp}} \int_{0}^{1} d\gamma\, (1-\gamma^2)\, e^{-\alpha\gamma^2} \tag{A7-11}$$

Das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\gamma\, (1-\gamma^2)\, e^{-\alpha\gamma^2} &= \\ &= \int_0^1 d\gamma\, e^{-\gamma^2} + \frac{\gamma}{2\alpha}\, e^{-\alpha\gamma^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 d\gamma\, e^{-\alpha\gamma^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha} + \left(1-\frac{1}{2\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\sqrt{\alpha}} dy\, e^{-y^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{2\alpha-1}{4\alpha}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\, \mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}) \end{aligned} \tag{A7-12}$$

führt auf die Fehlerfunktion (vgl.etwa /27,S.65)

$$\mathrm{erf}(x) \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\; e^{-y^2} \tag{A7-13}$$

Im allgemeinen ist also die Abklingfunktion eines isotropen Gemischs keine Exponentialfunktion.

Für $|\alpha| \ll 1$, also gemäß (A7-10) für $\tau^{\uparrow} \approx \tau^{\rightarrow}$ und kleine t kann man nähern

$$\int_0^1 d\gamma\; (1-\gamma^2)\; e^{-\alpha\gamma^2} \;\approx\; \int_0^1 d\gamma\; \{1 - (1+\alpha)\gamma^2\}$$

$$\approx\; 1 - \frac{1+\alpha}{3} \;\approx\; e^{-\frac{1+\alpha}{3}} \tag{A7-14}$$

und erhält mit (A7-11)

$$I(t) \;\approx\; \frac{3}{8\pi}\, \Delta\Omega_N\; I_o\; e^{-1/3}\; e^{-t(2/\tau^{\rightarrow} + 1/\tau^{\uparrow})/3} \tag{A7-15}$$

Hier ist also näherungsweise I(t) eine Exponentialfunktion mit der Abklingkonstanten τ^{is} nach (A7-1), (A7-9).

Durch geeignete Wahl von W_D erhält man I(t) leicht aus (A7-6) für andere Spezialfälle von Gemischen. Sind etwa nur die Achsenlagen (Hauptlagen) möglich und gleichwahrscheinlich, so ist zu setzen

$$W_D(\cos\vartheta,\varphi) \;:=\; \frac{1}{3}\,\{\,\delta(\cos\vartheta-1,\varphi) + \delta(\cos\vartheta,\varphi) + \delta(\cos\vartheta,\varphi-\pi/2)\} \tag{A7-16}$$

Wesentlich anders - und sowohl für theoretische wie für experimentelle Untersuchungen erheblich einfacher - als bei der soeben behandelten gemischten Gesamtheit ist die Abklingfunktion $I(t)$, wenn der einzelne Oszillator keine im Raum fixierte Richtung besitzt, sondern sich drehen kann. Die Drehung möge nun einerseits so langsam erfolgen, daß das reflektierte Eigenfeld (Lichtweg $\approx \lambda$) den Oszillator noch in der Emissionsstellung antrifft: Dann bleiben die in den theoretischen Methoden abgeleiteten Ergebnisse richtig. Andererseits möge sich der Oszillator während seiner mittleren Lebensdauer ($\tau \approx$ Meßzeit) hinreichend oft gedreht haben: Nur dann macht sich das Drehen bei der Messung bemerkbar. Wegen $A/\lambda = N \approx 10^{11}$ nach (A8-5)f bleibt durch die beiden Forderungen ein sehr großer Bereich von Drehgeschwindigkeiten erlaubt.

Hätte der Oszillator nur n mit den Wahrscheinlichkeiten $W_i := W(\cos\vartheta_i, \varphi_i)$ erlaubte diskrete Stellungen $S_i := \{\cos\vartheta_i, \varphi_i\}$, so wäre offenbar sein Energiestrom zur Zeit t [1]

$$I_D(t) = I_o \prod_{i=1}^{n} \exp\{-t \cdot W_i/\tau(\vartheta_i)\}$$

$$= I_o \cdot \exp\{-t \sum_{i=1}^{n} W_i/\tau(\vartheta_i)\} \qquad \text{(A7-17)}$$

---

[1] Bei festgehaltenem t zerlegen wir t: $t_i := \sum_{k=1}^{i} W_k \cdot t$. Werden die Stellungen S_i in der Reihenfolge ihrer Nummerierung durchlaufen, so befindet sich der Oszillator im Zeitintervall $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ in der Stellung S_i und klingt mit der zugehörigen Zeitkonstanten $\tau(\vartheta_i)$ ab. Zur Zeit t' mit $t_{i-1} \le t' \le t_i$ ist also $I_D(t') = I_D(t_{i-1}) \cdot \exp\{-(t'-t_{i-1})/\tau(\vartheta_i)\}$ und damit ist $I_D(t_i) = I_D(t_{i-1}) \cdot \exp\{-W_i \cdot t/\tau(\vartheta_i)\}$. Durch Induktion folgt (A7-17.1). Man erkennt nachträglich, daß das Ergebnis (A7-17.1) weder von der Zerlegung noch von der Reihenfolge der Stellungen abhängt.

Für kontinuierliche Verteilungen läßt sich (A7-17) verallgemeinern

$$I_D(t) = I_o \cdot \exp\{-t \int d\cos\vartheta \int d\varphi \, \frac{W(\cos\vartheta,\varphi)}{\tau(\vartheta)}\}$$

$$= I_o \cdot \exp(-t/\bar{\tau}) \qquad \text{(A7-18)}$$

mit

$$\frac{1}{\bar{\tau}} := \int d\cos\vartheta \int d\varphi \, \frac{W(\cos\vartheta,\varphi)}{\tau(\vartheta)} \qquad \text{(A7-19)}$$

Haben alle Oszillatoren dieselbe Abklingfunktion $I_D(t)$ nach (A7-18), so bezeichnen wir die Gesamtheit der Oszillatoren als "reine Gesamtheit". Analog zu (A7-2) erhält man jetzt

$$I(t) = I_o \, e^{-t/\bar{\tau}} \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_{0}^{2\pi} d\varphi \, W_D(\cos\vartheta,\varphi) \cdot \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_{0}^{2\pi} d\Phi \, W_E(\cos\vartheta,\varphi;\cos\theta,\Phi) \, W_N(\cos\theta,\Phi) \qquad \text{(A7-20)}$$

und in der Näherung von (A7-8) wird

$$I(t) = \frac{3}{16\pi} \Delta\Omega_N \, I_o \, e^{-t/\bar{\tau}} \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \sin^2\vartheta$$

$$= \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \, I_o \, e^{-t/\bar{\tau}} \qquad \text{(A7-21)}$$

Bei isotroper Verteilung $W(\cos\vartheta,\varphi) := 1/4\pi$ geht (A7-19) offenbar in (A7-1) über:

$$I_D(t) = I_o \, e^{-t/\tau^{is}} \qquad \text{(A7-22)}$$

Für $\tau(\vartheta)$ nach (A7-9) erhält man

$$\frac{1}{\tau^{is}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\tau^{\uparrow}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\tau^{\rightarrow}} \qquad \text{(A7-23)}$$

Zusammenfassung:

Durch Messen der Abklingfunktion I(t) einer Gesamtheit von Oszillatoren ist es nicht nur möglich, zwischen verschiedenen Verteilungen $W_D(\cos\vartheta,\varphi)$ - vgl.(A7-7)f, (A7-16) - einer Gesamtheit zu unterscheiden (das ist bereits früher bemerkt worden: vgl.etwa /6/,S.108), sondern man kann sogar zwischen gemischten Gesamtheiten nach (A7-2) und reinen Gesamtheiten nach (A7-20) unrerscheiden: Nur für reine Gesamtheiten ist die Abklingfunktion allgemein eine Exponentialfunktion.

Insbesondere läßt sich zwischen der isotropen gemischten Gesamtheit nach (A7-8) und der isotropen reinen Gesamtheit nach (A7-21) unterscheiden. Darauf wird hier erstmals hingewiesen.

A8. Einige Zahlenwerte für den Eu-Oszillator

Zur Abschätzung der Güte einiger Näherungen sollen hier einige Zahlenwerte für den Eu-Komplex I nach (2.1.-1) zusammengestellt werden.

Die Wellenlänge λ und die mittlere Lebensdauer τ des untersuchten Übergangs des Europium-Komplexes sind

$$\lambda \approx 600 \text{ nm} \tag{A8-1}$$

$$\tau \approx 0.7 \text{ ms} \tag{A8-2}$$

Damit wird die "Dämpfungskonstante"

$$b_0 := 1 / \tau \approx 1.4 \cdot 10^3 / \text{s} \tag{A8-3}$$

Für die Kreisfrequenz gilt

$$\omega := 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda \approx 3 \cdot 10^{15} / \text{s} \tag{A8-4}$$

Die Zahl der Schwingungen, die der Europium-Oszillator während seiner mittleren Lebensdauer ausführt, ist

$$N := \nu \cdot \tau = \tau \cdot c/\lambda \approx 3.5 \cdot 10^{11} \tag{A8-5}$$

Der Wellenzug, den der Eu-Komplex während seiner mittleren Lebensdauer τ emittiert, hat danach die Länge

$$\Lambda := N \cdot \lambda = c \cdot \tau \approx 210 \text{ km} \tag{A8-6}$$

Λ ist der Weg, den das Licht während der mittleren Lebensdauer des Dipols zurücklegt.

Literatur-Verzeichnis

/1/ Blodgett,K.B.: J.Am.Chem.Soc. 57(1935),1007-1022

/2/ Bronstein,I.N.; Semendjajew,K.A.:
Taschenbuch der Mathematik;
Teubner-Verlag, Leipzig (1969)

/3/ Bücher,H.: Dissertation; Marburg (1970)

/4/ Bücher,H.; Drexhage,K.H.; Fleck,M.; Kuhn,H.;
Möbius,D.; Schäfer,F.P.; Sondermann,J.;
Sperling,W.; Tillmann,P.; Wiegand,J.:
Mol.Cryst. 2(1967),199-230

/5/ Bücher,H.; Kuhn,H.; Mann,B.; Möbius,D.;
von Szentpály,L.; Tillmann,P.:
Photogr.Sci.Eng. 11(1967),233-241

/6/ Drexhage,K.H.: Habilschrift; Marburg (1966)

/7/ Drexhage,K.H.: J.Lum. 1(1970),693-701

/8/ Drexhage,K.H.; Fleck,M.; Kuhn,H.; Schäfer,F.P.;
Sperling,W.:
Ber.Bunsengesell.Phys.Chem.70(1966),1179

/9/ Fleck,M.: Dissertation; Marburg (1969)

/10/ Frank,Ph.; v.Mises,R.:
Die Differential- und Integralgleichungen
der Mechanik und Physik; I,II;
Dover, Vieweg (1961)

/11/ Franke,H.: dtv-Lexikon der Physik

/12/ v.Hoerschelmann,H.: Jahrb.d.drahtl.Tel. 5(1911),
14-34 und 188-211

/13/ Inacker,O.; Kuhn.H.; Bücher,H.; Meyer,H.; Tews,K.H.:
Chem.Phys.Letters 7,2(1970),213-218

/14/ Kuhn,H.: Pure and appl.Chemistry 11(1965),345-357

/15/ Kuhn,H.: Naturwiss. 54(1967),429-435

/16/ Kuhn,H.: J.Chem.Phys. 53(1970),101-108

/17/ Lagally,M.; Franz,W.: Vorlesungen über Vektorrech-
nung (1956); Geest u. Portig K.-G.; Leipzig

/18/ Landolt-Börnstein: Optische Konstanten, Bd.II/8; Springer-Verlag; Berlin-Göttingen-Heidelberg (1962)

/19/ Langmuir,I.: J.Am.Chem.Soc. 39(1917),1848-1906

/20/ van der Pol,B.; Niessen,H.F.: Ann.d.Phys.V, 6(1930),273-294

/21/ Sommerfeld,A.: Ann.d.Phys.IV, 28(1909),665-736

/22/ Sommerfeld,A.: Ann.d.Phys.IV, 81(1926),1135-1153

/23/ Sommerfeld,A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd.III(1967), Bd.VI(1966); Geest u. Portig K.-G.; Leipzig

/24/ Tews,K.H.; Inacker,O.; Kuhn,H.: Nature Lond.228(1970),276-278 und 791

/25/ Trurnit,H.J.: Fortschr.d.Chem.org.Naturst. 4(1945),347-476

/26/ Uhde,K.: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, BI 76/a (1964)

/27/ Weizel,W.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd.I(1955), Bd.II(1958); Springer-Verlag; Berlin-Göttingen-Heidelberg

/28/ Weyl,H.: Ann.d.Phys.IV, 60(1919),481-500

/29/ Zwick,M.M.; Kuhn,H.: Z.Naturforsch. 17a(1962),411-414

/0/ Umfangreichere numerische Rechnungen wurden an dem Telefunken Rechner TR4 der Zentralen Rechenanlage (ZRA) der Universität Marburg durchgeführt. Die meisten Programme wurden in ALGOL geschrieben.
Die experimentellen und theoretischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wurden von dem in der ZRA vorhandenen CALCOMB Plotter 563 gezeichnet.

Herrn Prof. Dr. H. Kuhn danke ich für wertvolle Anregungen und Diskussionen, Herrn Prof. Dr. K. Suchy für das freundliche Übernehmen der Berichterstattung.

Herrn Dr. H. Bücher danke ich insbesondere für apparative Hilfe, Herrn J. Radloff von der ZRA Marburg besonders für Hilfe bei Schwierigkeiten mit dem Betriebssystem des TR4, Herrn Dr. F. Bär für das freundliche Überlassen des C 1024 Computers.

Besonders dankbar bin ich Herrn Dipl. Chem. O. Inacker, der mich in das Physikalisch-Chemische Institut einführte und sich mir jederzeit für Fragen und intensive Diskussionen zur Verfügung stellte.

Lebenslauf

Karl-Heinz Tews, geb. 1.12.1937 in Köslin (Pommern)

Herbst 1943 bis Ende 1944 Volksschule in Köslin
Dezember 1946 bis Ostern 1949 Volksschule in Schledehausen bei Osnabrück
Ostern 1949 bis Ostern 1958 Gymnasium in Osnabrück
24.2.1958 Abitur

Ostern 1958 bis Ostern 1959 Bundeswehr

SS 1959 bis SS 1962 Studium der Mathematik und Physik in Bonn
21.5.1962 Diplom-Vorprüfung in Physik
WS 1962/63 bis WS 1968/69 Studium der Physik in Marburg/Lahn und Diplomarbeit unter Prof.Dr.W.Walcher mit dem Thema "Kernresonanzfluoreszenz-Untersuchungen zum 621 keV-ß-Zerfall des Sb-124"
6.6.1969 Diplom-Hauptprüfung in Physik

ab 1.7.1969 am Physikalisch-Chemischen-Institut der Universität Marburg/Lahn und
ab 1.7.1970 am Max-Planck-Institut für biophysikalische Chemie in Göttingen als wissenschaftlicher Assistent
Dissertation unter Prof.Dr.H.Kuhn mit dem Thema "Zur Variation von Lumineszenz-Lebensdauern".

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten

Ecker, Erwe, Helferich, Hirzebruch, Jaeckel, Krull, Osberghaus, Paul, Peschl, Ringel, Schmitz-DuMont, Schöneborn, Thimm, Tschesche, Weizel in Bonn und

Großmann, Kamke, Kuhn, Ludwig, Madelung, Petzold, Schmidt, Suchy, Walcher, Wirsing, Wolter in Marburg.